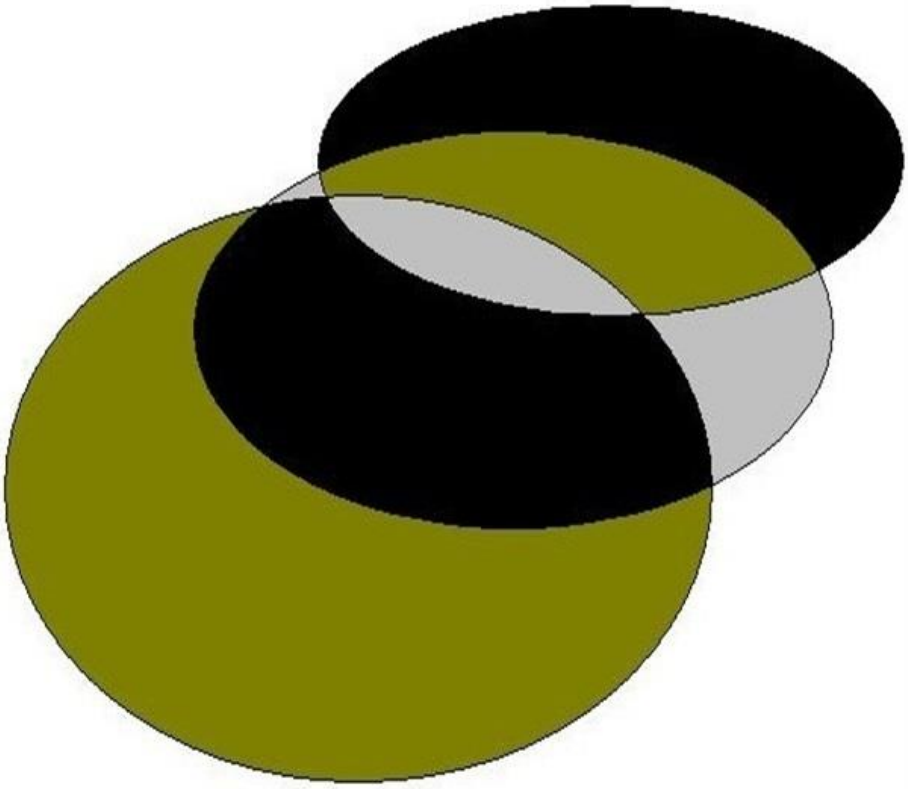


UMA REFLEXÃO SOBRE A TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL

Luiz Renato Gomes e Cláudio Homero Ferreira da Silva

Luiz Renato Gomes e Cláudio Homero Ferreira da Silva

Uma reflexão sobre a teoria da relatividade especial

1ª Edição

Belo Horizonte
L. R. Gomes e C. H. F da Silva
2020

Luiz Renato Gomes e Cláudio Homero Ferreira da Silva.
Uma reflexão sobre a teoria da relatividade especial [livro eletrônico] /Luiz Renato Gomes – Belo Horizonte: Cláudio Homero Ferreira da Silva,2020.

1,3 MB; e PUB.
ISBN 978-65-00-00545-5

1. Física 2. Teoria de relatividade I. Gomes, Luiz Renato. II. Silva, Cláudio Homero Ferreira III.Título.

CDD: 620

RESUMO

Este livro apresenta trabalhos compilados a partir de livros que estão listados no final, como referências, dentro do tema Teoria da Relatividade. A idéia central é mostrar esses trabalhos desenvolvidos matematicamente de modo que os principais conceitos da teoria da relatividade sejam expostos de maneira mais clara. A primeira parte do trabalho relaciona a idéia de duas lanchas que se deslocam em um rio, enquanto a segunda parte trata da própria Teoria da Relatividade apresentada por Albert Einstein no famoso artigo de 1905. Em seguida, a Teoria da Relatividade é abordada sob o aspecto matricial.

Palavras-chave: Física; Teoria da Relatividade.

ABSTRACT

This book presents works compiled from books that are listed at the end, in references, within the Relativity Theory Theme.The central idea is to show these works developed mathematically so that main concepts of the relativity theory are exposed more clearly.The first work relates the idea of two motorboats moving in a river, while the second deals with the Special Relativity Theory presented by Albert Einstein in the famous 1905 paper. After that, the Relativity Theory is approached under matrix concepts.

Key words: Physics; Theory of relativity.

SUMÁRIO

1. OBSERVAÇÕES INICIAIS 6
2. PROBLEMA DE MECÂNICA RELATIVÍSTICA 7
2.1. Introdução 7
2.2. Movimento Relativo 7
2.3. Primeira Análise 8
2.4. Conclusões da Primeira Análise 10
3. SOBRE A ELETRODINÂMICA DOS CORPOS EM MOVIMENTO 11
3.1. Introdução 11
3.2. Parte Cinemática 12
3.2.1. Definição de Simultaneidade 12
3.2.2. Sobre a Relatividade de Comprimentos e Tempos 13
3.2.3. Teoria da Transformação das Coordenadas e do Tempo na Passagem de um Sistema em Repouso para Outro que Está Animado em Relação ao Primeiro de uma Translação Uniforme 15
3.2.4. Efeitos do Movimento Relativo 28
3.2.5. Cinemática Relativística 30
3.2.6. Dinâmica Relativística 35
4. DISCUSSÃO SOBRE A TEORIA DA RELATIVIDADE 42
4.1. Com Respeito ao Desenvolvimento da Idéia Relativística 42
4.2. Com Respeito à Questão dos Raios Cósmicos que Atingem a Terra 42
4.3. Com Respeito ao Desenvolvimento da Equação Diferencial dos Tempos Item 3.2.3 43
4.4. Com Respeito ao Aparecimento da Quarta Dimensão em Ct 45
4.5. Com Respeito à Métrica $(ds)^2$ do Espaço de Minkowski 45
4.6. Com Respeito á Dinâmica Relativística e ao Conceito de Massa Inercial 46
5. TEORIA DA RELATIVIDADE PELA ÓTICA DO CÁLCULO VETORIAL 49
5.1. Postulados da Teoria da Relatividade 49
5.2. Equações do Movimento Relativo na Forma Vetorial 49
5.3. Equações do Movimento Relativo do Espaço de Minkowski 52
REFERÊNCIAS 69

1. OBSERVAÇÕES INICIAIS

A Teoria da Relatividade apresentada por Albert Einstein considera, além daquilo que ficou estabelecido no artigo de 1905, outras condições que são fundamentais para o perfeito entendimento desta, tais como:

- As medições de distância não utilizam padrões métricos clássicos comparativos como réguas, trenas, teodolitos, etc, mas sim o produto "*Ct*", ou seja, a medição é promovida através do espaço percorrido por um raio de luz, emitido a partir de um ponto definido, sendo *C* a velocidade da luz e em seu valor constante.
- Não se pode esquecer que o valor da velocidade da luz, dado como $C = 3 \times 10^8$ *m/s*, trata-se do valor da velocidade da luz no vácuo que, às vezes, é confundida, de maneira aproximada, com a velocidade da luz no ar, embora esses valores possam diferir levemente entre si.
- Como o próprio Einstein comentou no seu artigo, a idéia é encontrar uma equação diferencial que, partindo da existência de uma diferença nos tempos dos sistemas inercial e aquele em movimento, estabeleçamos como solução a relação entre esses tempos de modo a permitir a transformação entre as grandezas desses 2 sistemas.
- A luz muda a sua velocidade quando passa entre diferentes meios o que deve ser sempre levado em conta.
- Todas as ondas eletromagnéticas, incluindo aí a luz visível, obedecem religiosamente à equação da propagação das ondas, ou seja, $C = \lambda f$, onde λ é o comprimento de onda e *f* a sua frequência.

2. PROBLEMA DE MECÂNICA RELATIVÍSTICA

2.1. Introdução

Este estudo tem por objetivo refazer e analisar o problema de mecânica relativística abordado no livro da referência 1.
A análise se dará sobre o modelo formado pelo sistema de 2 lanchas se movendo em um rio.
Inicialmente a análise recairá sobre a questão lancha e correnteza, depois sobre a questão corpo e velocidade da luz.

2.2. Movimento Relativo

Seja analisar o movimento relativo de 2 lanchas se movendo em um rio, conforme mostrado na figura 2.1.

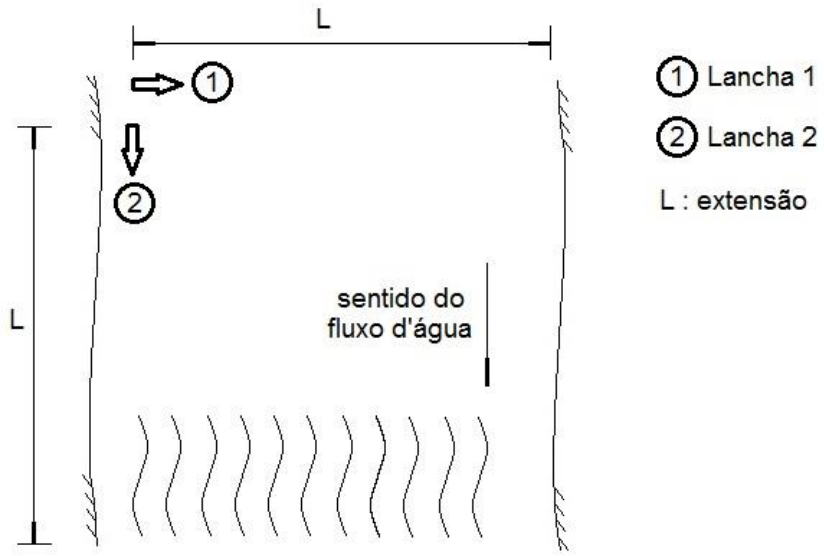


FIGURA 2.1 – Rio com 2 lanchas

A lancha 1 deverá sair de uma das margens e atingir a outra margem enquanto a lancha 2 deverá descer o rio e subi-lo posteriormente.
Neste problema existem 2 possibilidades que deverão ser consideradas, a saber:

- a lancha 1 deverá sair da primeira margem e atingir a outra margem em linha reta e na mesma horizontal;

- a lancha 1 deverá sair da primeira margem e atingir a outra margem não necessariamente na mesma horizontal.

Essas 2 condições não foram abordadas no livro da referência 1 o que poderia trazer dificuldades em analogias posteriores. Como no livro da referência 1 a abordagem foi bem

simples, tal situação não aconteceu. Será analisada apenas a condição 1 que já é suficiente para as conclusões.

2.3. Primeira Análise

Para essa análise deverão ser respeitadas as seguintes condições:

- as 2 lanchas deverão ter velocidades iguais e uniforme;
- ambas as lanchas deverão percorrer a mesma distância que será a distância entre uma margem a outra;
- a lancha 1 deverá atingir a margem oposta na mesma horizontal desenvolvendo uma trajetória exatamente perpendicular ao movimento das águas rio a baixo.

Para que essa situação seja exequível de modo que a lancha 1 atravesse o rio, atinja a margem oposta e volte ao ponto de partida seguida pelo movimento da lancha 2 que deverá descer o rio, na mesma distância entre as margens, e suba de volta contra a força da correnteza é fato que sua velocidade deverá ser maior que a velocidade da corrente de água do rio, do contrário a proposição inicial do problema não seria verificada.

Deste modo, o diagrama de velocidades mostrado na figura 2.2 deverá ser respeitado.

Na figura 2.2 temos:

V : velocidade da lancha 1;
C : velocidade da correnteza;
θ : ângulo de inclinação da lancha 1 em relação ao rio.

Sendo L a distância entre as 2 margens do rio, notamos que a lancha 1 deverá se mover com uma velocidade V na direção indicada na figura 2.2 visando a compensação da velocidade da correnteza contrária a seu movimento.
Deste modo, pelo diagrama da figura 2.2, a lancha 1 sairá da margem esquerda e atingirá a margem direita com velocidade V_X, num tempo $t_1/2$, percorrendo a distância L na horizontal.

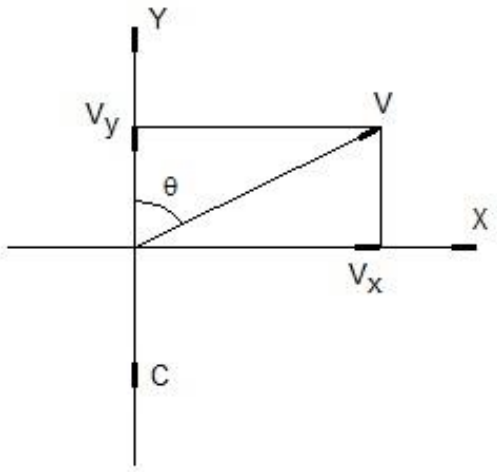


FIGURA 2.2 – Diagrama de velocidades – condição primeira

O valor do tempo t_1 será:

$$t_1 = \frac{2L}{V_X}$$

Mas temos que:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2$$

Como deve haver compensação, a velocidade $V_y = -C$ sendo o seu módulo $|V_y| = C$.

Logo:

$$V_x^2 = V^2 - V_y^2 \quad \therefore \quad V_x^2 = V^2 - C^2$$

$$V_x = \sqrt{V^2 - C^2} \tag{2.001}$$

Sendo:

$$\theta = tg^{-1} \frac{\sqrt{1 - \left(C/V\right)^2}}{C/V} \tag{2.002}$$

Assim, o tempo para que a lancha 1 saia de um lado do rio e atinja a outra margem, retornando posteriormente ao ponto inicial, será:

$$t_1 = \frac{2L}{\sqrt{V^2 - C^2}} \tag{2.003}$$

Agora, a lancha 2 descerá o rio com velocidade $V+C$ no mesmo sentido da correnteza e subirá o rio, posteriormente, com a velocidade $V-C$.
O tempo para que a lancha 2 saia da origem, atinja uma distância igual ao comprimento da margem 1 até a margem 2, voltando posteriormente a sua origem, será:

$$t_2 = t_{2\,descida} + t_{2\,subida}$$

Onde:

$$t_{2\,descida} = \frac{L}{V+C}$$

e:

$$t_{2\,subida} = \frac{L}{V-C}$$

Ou seja:

$$t_2 = \frac{L}{V+C} + \frac{L}{V-C}$$

$$t_2 = \frac{2VL}{V^2 - C^2} \qquad (2.004)$$

A relação entre os tempos despendidos pelas lanchas será então:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\dfrac{2L}{\sqrt{V^2 - C^2}}}{\dfrac{2VL}{V^2 - C^2}} = \frac{V^2 - C^2}{V\sqrt{V^2 - C^2}} = \frac{V^2(1 - C^2/V^2)}{V^2\sqrt{(1 - C^2/V^2)}}$$

Assim:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{\sqrt{(1 - C^2/V^2)}} \quad para \quad V > C \qquad (2.005)$$

2.4. Conclusões da Primeira Análise

- A equação 2.005 não tem significação física para situações em que a velocidade *C* da correnteza seja maior que a velocidade das lanchas, velocidade *V*.
- Numa outra condição extrema, quando as velocidades da correnteza e das lanchas forem iguais, a relação $t_2/t_1 \rightarrow \infty$. Isto significa que a lancha 1, pela equação 2.003, levará um tempo infinito para atingir a outra margem do rio, enquanto que a lancha 2, pela equação 2.004, levará também um tempo infinito para subir o rio. Em outras palavras, a lancha 1 não conseguirá atingir a margem oposta e a lancha 2 não conseguirá subir o rio, ficando parada.
- Outra condição interessante ocorrerá caso a velocidade da correnteza seja nula, ou seja, estejam as lanchas em uma lagoa ou em lago, por exemplo. Neste caso os tempos despendidos pelas 2 lanchas serão iguais como era esperado.
- Considerando a experiência de Michelson-Morley [1] realizada em 1887, a analogia seria do seguinte modo. Cada uma das 2 lanchas seria uma fonte de luz enquanto que a velocidade da correnteza seria a velocidade do possível éter intergaláctico que se acreditava existir até então. Uma possível constatação de diferença entre os tempos, dada pela equação 2.005, seria suficiente para a comprovação da existência do éter. Ocorre que nenhuma diferença foi observada pela experiência.
- Considerando, por suposição, que a constância da velocidade da luz, proposta por Maxwell, seja suficiente, surge aquilo que se pode chamar de descrédito pela existência do éter intergaláctico. A questão da constância da velocidade da luz, aqui mencionada, tem a ver com a interpretação dada ao efeito da propagação da onda eletromagnética no vácuo onde a velocidade de propagação é considerada igual à velocidade da luz [3×10^8 *m/s*].

[1] A experiência de Michelson-Morley, uma das mais importantes e famosas experiências da história da física, foi realizada em 1887 por Albert Michelson (1852 - 1931) e Edward Morley (1838-1923). Ver referências 2 e 6.

3. SOBRE A ELETRODINÂMICA DOS CORPOS EM MOVIMENTO

3.1. Introdução

Este estudo tem por objetivo refazer e analisar a Teoria da Relatividade referente ao artigo de autoria de Albert Einstein, artigo este publicado em 1905.
Na apresentação do artigo foi utilizado o cálculo diferencial da forma original segundo publicação contida na referência 2. Segue o texto em português a partir do artigo original em língua germânica conforme tradução realizada por Mário José Saraiva do Colégio Militar de Portugal, tradução do original alemão DAS RELATIVITÄTSPRINZIP, de H. A. Lorentz, A. Einstein e H. Minkowski, 6ª. Edição de B. G. Teubner, Stuttgard, Alemanha, 1958.

Como é sabido, a Eletrodinâmica de Maxwell – tal como atualmente a concebemos – conduz, na sua aplicação sob corpos em movimento, a assimetrias que não parecem ser inerentes aos fenômenos. Consideremos, por exemplo, as ações eletrodinâmicas entre um imã e um condutor. O fenômeno observável depende aqui unicamente do movimento do condutor e do imã, ao passo que, segundo a concepção habitual, são nitidamente distintos os casos em que o móvel é um, ou o outro desses corpos.
Assim, se for móvel o imã e estiver em repouso o condutor, estabelecer-se-á em volta do imã um campo elétrico com um conteúdo energético que dará origem a uma corrente elétrica nas regiões onde estiverem colocadas porções do condutor.
Mas se é o imã que está em repouso e o condutor que está em movimento, então, embora não se estabeleça em volta do imã nenhum campo elétrico, há no entanto uma força eletromotriz que não corresponde a nenhuma energia, mas que dá lugar a correntes elétricas de grandeza e comportamento iguais às que tinham no primeiro caso as produzidas por forças elétricas, desde que nos 2 casos considerados, haja identidade no movimento relativo.
Segundo notas de Einstein, referência 2, página 47, exemplos desse tipo, assim como as experiências de Michelson-Morley para identificar um possível movimento da Terra em relação a um tal "meio luminífero" ou éter galáctico ou ainda éter luminífero, levam à suposição de que, tal como na mecânica, também na Eletrodinâmica os fenômenos não apresentam nenhuma particularidade que possa se fazer corresponder à idéia de um repouso absoluto.
Segundo Einstein, a introdução de um "éter luminífero" revelar-se-á supérflua, visto que na teoria que ele está propondo não haveria necessidade de introduzir um espaço absoluto, nem de atribuir um vetor velocidade a qualquer ponto do espaço vazio em que tenha lugar um processo eletromagnético.
Essa teoria, ainda conforme Einstein estabelece, vai se apoiar – como qualquer outra Eletrodinâmica – na cinemática do corpo sólido rígido, uma vez que as proposições de uma teoria deste gênero consistem na afirmação de relações entre corpos rígidos (sistema de coordenadas), relógios e processos eletromagnéticos. A insuficiente atenção a este fato é, segundo Einstein, a raiz das dificuldades com que presentemente (1905) se defronta a eletrodinâmica dos corpos em movimento.

3.2. Parte Cinemática

3.2.1. Definição de Simultaneidade

Consideremos um sistema de coordenadas onde são válidas as equações da mecânica de Newton[2].
Uma descrição matemática só tem sentido físico se definirmos claramente o que entendemos por "tempo".
Essa expressão, embora confusa, na realidade só tem sentido por enquanto se tratar da teoria da relatividade, independente daquilo que possa parecer.
Numa situação normal, se quisermos descrever o movimento de um ponto material no espaço não teremos mais do que dar o valor de suas coordenadas em função do tempo.
Mas devemos agora ter em atenção que tal descrição matemática só tem sentido físico se definirmos claramente essa palavra "tempo" bem como o seu sentido em *strictu senso*.
Segundo Einstein, poderia parecer que todas as dificuldades em que tropeça a definição de "tempo" seriam eliminadas se, em vez de tempo, fosse utilizada a expressão "posição dos ponteiros do meu relógio" para definir tal condição.

Imaginemos 2 pontos situados sobre uma linha reta no espaço, pontos *A* e *B*. Logicamente que existe uma distância física entre esses 2 pontos.
Agora, 2 relógios, exatamente iguais, são postos, um em cada ponto de modo que tempos possam ser medidos.
Imaginemos um raio de luz partir de *A* para B, no instante t_A, no tempo de *A*, se refletir em *B*, na direção de *A*, no instante t_B, no tempo de *B*, e chegar de novo em *A*, no instante t'_A, no tempo de *A*, conforme está mostrado na figura 3.1.

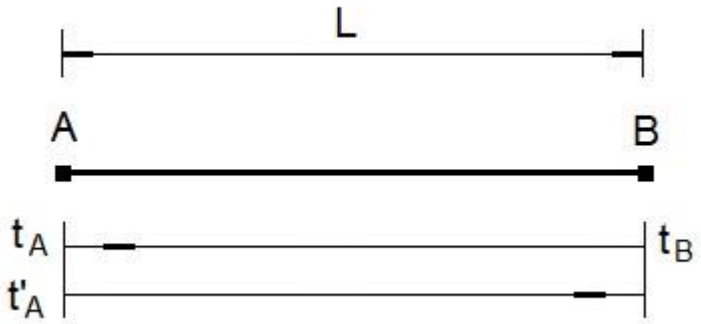


FIGURA 3.1 – Percurso AB da luz

Os 2 relógios colocados um em *A* e o outro em *B* somente funcionarão em pleno sincronismo se:

$$t_B - t_A = t'_A - t_B \tag{3.001}$$

Donde:

$$t_B = \frac{t'_A + t_A}{2} \tag{3.002}$$

[2] Devemos entender como válidas em primeira aproximação.

A partir da construção desse modelo ficam então estabelecidas as seguintes premissas que serão obedecidas daqui em diante:

a) se um relógio *1* é síncrono com um outro relógio *2*, também o relógio *2* é síncrono com o relógio *1*;

b) se o relógio *1* é síncrono com um terceiro relógio *3*, os 3 relógios são síncronos entre si.

A partir daqui fica bem definido o conceito de sincronismo e podemos então partir para a definição de simultaneidade.

Assim, tempo de deslocamento será então a indicação simultânea desse acontecimento, que é fornecida por um relógio que satisfaz às seguintes condições:

a) está colocado em repouso, no local do acontecimento;

b) é síncrono de um outro relógio em repouso todo o tempo;

c) há portanto simultaneidade na medição dos relógios.

Admitindo que a distância entre os pontos *A* e *B*, da figura 3.1, seja *L*, vem que:

$$C = \frac{2L}{t'_A - t_A} \tag{3.003}$$

Onde *C* é a velocidade da luz no espaço vazio[3].

3.2.2. Sobre a Relatividade de Comprimentos e Tempos

As reflexões que se seguem se apóiam no princípio da relatividade e no princípio da constância da velocidade da luz.

a) As leis segundo as quais se modificam os estados dos sistemas físicos são as mesmas, quer sejam referidas a um determinado sistema de coordenadas, quer o sejam a qualquer outro que tenha movimento de translação uniforme em relação ao primeiro.

b) Qualquer raio de luz se move no sistema de coordenadas em repouso com uma velocidade determinada *C*, que é a mesma, quer esse raio seja emitido por um corpo em repouso, quer o seja por um corpo em movimento.

Segundo Einstein, a fórmula proposta para a definição daquilo que chamamos velocidade da luz é a seguinte:

[3] Foi o próprio Einstein quem assim o designou e o tradutor procedeu.

$$velocidade\,C = \frac{percurso\ efetuado\ pela\ luz}{intervalo\ de\ tempo} \qquad (3.004)$$

Onde "*intervalo de tempo*" deve ser entendido no sentido fixado da definição do item 3.2.1.

<u>*EXPERIÊNCIA*</u> :

Consideremos uma haste rígida em repouso. Seja *L* o seu comprimento, medido com uma régua que está igualmente em repouso. Suponhamos agora que o eixo da haste coincide com o eixo *X* de um sistema de coordenadas *XYZ*, em repouso, e que se dá à haste um movimento uniforme de translação, de velocidade *V*, ao longo de eixo *X*, no sentido *X* crescente, sentido positivo do eixo.
Procuremos determinar o comprimento da haste em movimento considerando 2 operações seguintes:

a) O observador acompanha o movimento da haste e faz a medida como se haste, observador e régua de medida estivessem em repouso.

b) O observador determina quais são os pontos do sistema de repouso que coincidem no instante *t* com a origem e a extremidade da haste, empregando, para tal, relógios síncronos situados, em repouso, no sistema em repouso, de acordo com o que foi descrito no item 3.2.1, anterior. Fica então, pela medida, definido o comprimento da haste.

Adiantando os fatos, a medição a), que vamos designar por "comprimento da haste no sistema móvel", fornecerá um valor da haste igual ao valor de haste em repouso. Já na operação b), que vamos designar por "comprimento da haste (móvel) no sistema em repouso", fornecerá um valor diferente daquele valor obtido pela primeira medição.

A explicação é a seguinte conforme Einstein. Todas as condições para as medições, conforme estabelecido no item 3.2.1, foram respeitadas em termos do observador, relógio e sistemas de coordenadas.
Suponhamos, para tal, que um raio de luz sai de *A* no instante t_A, se reflete em *B* no instante t_B e volta a *A* no instante t'_A . Tendo em vista a constância da velocidade luz, encontramos:

$$t_B - t_A = \frac{L}{C - V} \qquad (3.005\text{-a})$$

$$t'_A - t_B = \frac{L}{C + V} \qquad (3.005\text{-b})$$

Onde os sinais de *V*, ora "menos" ora "mais", têm a ver com as direções ora contrária ora a favor da velocidade da luz frente ao movimento de translação do sistema móvel em relação ao sistema em repouso.

As idéias até aqui desenvolvidas podem ser representadas através do esquema de coordenadas mostrado na figura 3.2.

Analisando os resultados dos tempos medidos e dados pelas equações 3.005-a,b temos a impressão primeira de que os relógios *A* e *B* não funcionaram em sincronismo. Essa

conclusão seria a mesma para os observadores que estivessem sob as condições determinadas e definidas na condição b) anterior.

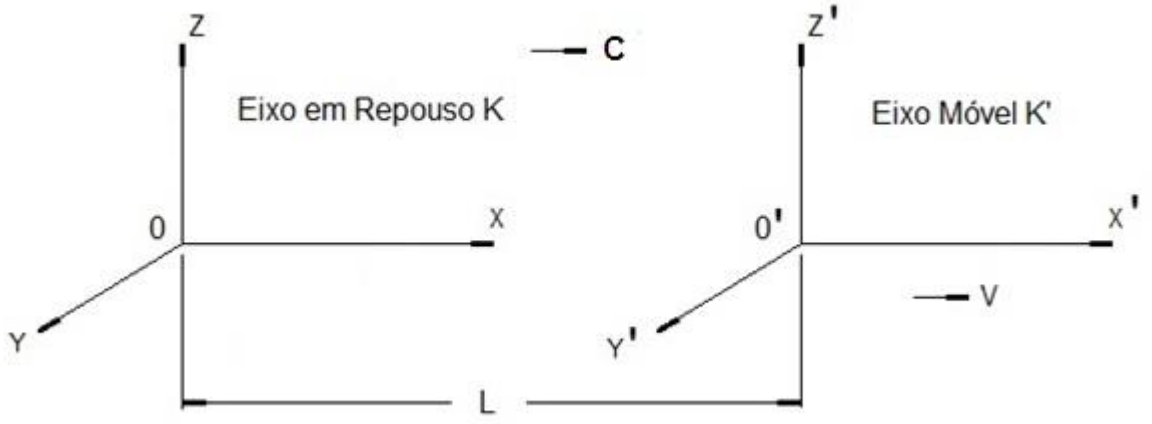


FIGURA 3.2 – Sistemas de eixos em repouso e móvel

Por esse exemplo, vemos que não podemos atribuir ao conceito de "simultaneidade" um significado absoluto e que, pelo contrário, 2 acontecimentos que são simultâneos, quando apreciados num determinado sistema de coordenadas, já não podem mais ser considerados como tal quando apreciados num sistema que se move em relação ao primeiro[4].

3.2.3. Teoria da Transformação das Coordenadas e do Tempo na Passagem de um Sistema em Repouso para Outro que Está Animado em Relação ao Primeiro de uma Translação Uniforme

Vamos considerar o sistema espacial descrito pela figura 3.2 no qual 2 sistemas de eixos cartesianos ou retangulares representam um grupo *XYZ* em repouso e outro *X'Y'Z'* em movimento. Imaginemos cada sistema de coordenadas munido de uma régua rígida e de certo número de relógios e admitamos que todos esses instrumentos de medida sejam rigorosamente idênticos respectivamente para cada uma de sua função.
Ao sistema em movimento denominaremos de *K'* e ao outro sistema em repouso de *K*.
À origem do sistema *K'* vamos comunicar uma velocidade constante *V* no sentido positivo do eixo *X* do mesmo modo como se encontra representado na figura 3.2.
Essa velocidade comunicar-se-á também à respectiva régua de medida e aos respectivos relógios.
Assim, cada instante *t* do sistema em repouso *K* corresponderá então uma determinada posição dos eixos do sistema móvel.
As medições das distâncias deverão ser feitas considerando os procedimentos adotados no item 3.2.1 quando foram utilizados sinais luminosos trocados entre os pontos de medida. Entre as coordenadas do sistema em repouso *x,y,z,t* existe uma perfeita correspondência com as respectivas coordenadas referentes ao sistema móvel ξ, η, ζ, τ.

Segundo Einstein, colocaremos agora o problema de encontrar o sistema de equações que liga as grandezas desses 2 sistemas. Antes de tudo, torna-se evidente que essas equações

[4] A situação verificada nesse exemplo, proposto por Einstein, leva em conta uma condição teórica na qual foi possível ora ficar ligeiramente abaixo da velocidade da luz ora acima, o que não inviabiliza a análise, pois o que esse estudo está procurando é exatamente uma relação, ou uma equação diferencial que possa amarrar essa condição de tempos diferentes a partir de uma situação infinitesimal, como prega a própria teoria do cálculo diferencial.

devem ser lineares por causa das propriedades de homogeneidade que atribuímos ao espaço e ao tempo.

A equação básica para um ponto sobre o eixo *X* será:

$$x = x' + Vt \tag{3.006}$$

Suponhamos, agora, que no instante τ_0 seja emitido, pela origem das coordenadas do sistema *K'*, um raio de luz que percorre o eixo *X* na direção de *X'* uma determinada distância deste sistema, se reflete nesse ponto no instante τ_1 e regresse à origem das coordenadas, ponto *0'*, onde chega no instante τ_2.
Como essa operação é a mesma descrita no item 3.2.1 anterior, a mesma equação 3.002 é válida, de modo que a seguinte relação dos tempos é obtida:

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1 \tag{3.007}$$

Inserindo os argumentos na função $\tau(x,y,z,t)$ vem:

$$\frac{1}{2}\left\{\tau(0,0,0,t) + \tau[0,0,0,(t + \frac{x'}{C-V} + \frac{x'}{C+V})]\right\} = \tau[x',0,0,(t + \frac{x'}{C-V})] \tag{3.008}$$

São as seguintes as coordenadas tomadas como argumento para a função τ do sistema *K'* em função da posição relativa do raio de luz:

$$\tau_0 \;\rightarrow\; \tau(x,y,z,t) \;\rightarrow\; \tau(0,0,0,t)$$

$$\tau_1 \;\rightarrow\; \tau(x,y,z,t) \;\rightarrow\; \tau[x',0,0,(t + \frac{x'}{C-V})]$$

$$\tau_2 \;\rightarrow\; \tau(x,y,z,t) \;\rightarrow\; \tau[0,0,0,(t + \frac{x'}{C-V} + \frac{x'}{C+V})$$

A coordenada na variável *t* quer dizer que se tomou o início da operação a partir de um tempo genérico do sistema em repouso *K*.

A partir desse ponto Einstein faz uma simplificação em função de uma condição que foi admitida.

Tomaremos a diferencial parcial [5] da equação 4.007 conforme o que se segue:

$$\frac{1}{2}(\partial\tau_0 + \partial\tau_2) = \partial\tau_1 \tag{3.009}$$

[5] A razão da diferencial parcial tem a ver com a função τ do sistema *K'* que é uma função de várias variáveis.

Como cada uma das funções τ_0, τ_1, τ_2 apresenta mais de uma variável, adotaremos a representação das variáveis auxiliares *m* e *n* conforme desenvolvimento seguinte.

Em $\tau_1[x',0,0,m]$ temos

$$m = t + \frac{x'}{C-V} \tag{3.010}$$

A partir daqui obtemos

$$dm = dt + \frac{dx'}{C-V} \tag{3.011}$$

Em $\tau_2[0,0,0,n]$ temos

$$n = t + \frac{x'}{C-V} + \frac{x'}{C+V} \tag{3.012}$$

A partir daqui obtemos

$$dn = dt + \frac{dx'}{C-V} + \frac{dx'}{C+V} \tag{3.013}$$

Para facilitar o equacionamento vamos adotar o ponto *t=0* o que em nada alterará o resultado final.

Assim trabalharemos agora com os pontos τ_0, τ_1, τ_2, em *t=0*, no sistema em repouso *K*.

Logo:

$$m = \frac{x'}{C-V} \quad \text{e} \quad dm = \frac{dx'}{C-V}$$

e

$$n = \frac{x'}{C-V} + \frac{x'}{C+V} \quad \text{e} \quad dn = \frac{dx'}{C-V} + \frac{dx'}{C+V}$$

A equação 4.009, já considerando o ponto de trabalho *t=0*, tomará a seguinte forma:

$$\frac{1}{2}\partial\tau_2 - \partial\tau_1 = 0 \tag{3.014}$$

Em condições normais, a equação 3.014 seria eleita a relação completa que satisfaria qualquer transformação dos tempos entre os 2 sistemas de coordenadas *K* e *K'*. Como há uma suspeita de que essa equação possa não traduzir aquilo que estamos pretendendo

exprimir, vamos completá-la com uma pequena parcela, um pequeno tempo, representado na equação 4.015 como $d\tau$, assim:

$$\frac{1}{2}\partial\tau_2 - \partial\tau_1 = \partial\tau \tag{3.015}$$

Assim podemos escrever o seguinte:

$$\tau_1 = \tau(m) \quad \therefore \quad \partial\tau_1 = \frac{\partial\tau}{\partial m}dm = \frac{\partial\tau}{\partial m}\left(\frac{dx'}{C-V}\right)$$

$$\tau_2 = \tau(n) \quad \therefore \quad \partial\tau_2 = \frac{\partial\tau}{\partial n}dn = \frac{\partial\tau}{\partial n}\left(\frac{dx'}{C-V} + \frac{dx'}{C+V}\right)$$

Com as expressões das diferenciais anteriormente calculadas vamos para a equação 3.015:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\tau}{\partial n}\left(\frac{dx'}{C-V} + \frac{dx'}{C+V}\right) - \frac{\partial\tau}{\partial m}\left(\frac{dx'}{C-V}\right) = \partial\tau \tag{3.016}$$

Na adoção de um valor infinitamente pequeno para *x'* uma das imposições seria considerar desprezível a parcela em *dx'* nas equações 3.011 e 3.013 fato que permitiria escrever as seguintes aproximações que serão então adotadas a partir daqui. Assim:

$$dm = dn = dt \tag{3.017}$$

Com tais aproximações a equação 3.016 tomará a seguinte forma:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{dx'}{C-V} + \frac{dx'}{C+V}\right) - \frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{dx'}{C-V}\right) = \partial\tau$$

Colocando a expressão anterior na forma escolhida por Einstein, no seu artigo de 1905, obteremos então:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C-V} + \frac{1}{C+V}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{dx'} + \frac{1}{C-V}\frac{\partial\tau}{\partial t} \tag{3.018}$$

Ao rearranjar a expressão da equação 4.018, obteremos a fórmula final da transformação.

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{V}{C^2 - V^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0 \tag{3.019}$$

Uma observação: segundo Einstein, é notório que, em vez da origem das coordenadas, poderíamos ter tomado qualquer outro ponto para ponto de partida do raio de luz e, por isso, a equação que acabamos de obter seria também válida para todos os valores de *x',y,z*.
Por analogia, podemos escrever diretamente as equações para os outros eixos *Y* e *Z*.

Assim temos:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \tag{3.020}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \tag{3.021}$$

As equações 3.020 e 3.021confirmam que, para o nosso modelo, a função $\tau(x,y,z,t)$ não varia com relação aos eixos *X* e*Y*. Esse foi um de nossos condicionantes.

Outra observação, considerando a constância da velocidade da luz para todos os eixos, estamos também dizendo que a luz, observada no sistema *X'Y'Z'*, em relação ao sistema *XYZ*, se propaga sempre, ao longo desses eixos *Y* e *Z*, segundo Einstein, com velocidade igual a $\sqrt{C^2 - V^2}$.

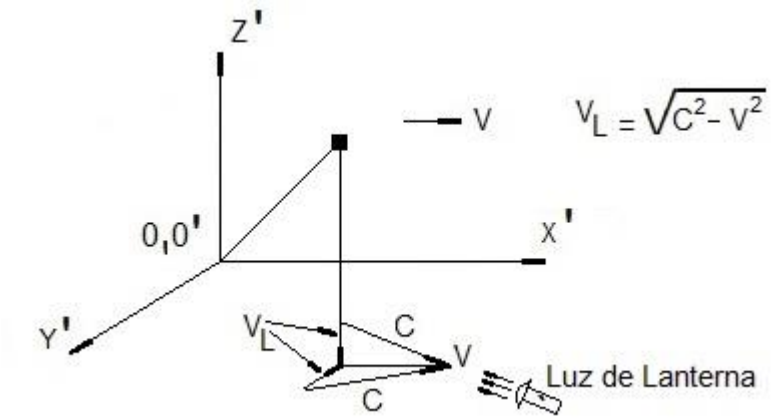


FIGURA 3.3 – Movimento relativo entre os sistemas de coordenadas *xyz* e *x'y'z'*

A figura 3.3 mostra como se dá essa percepção pelas deduções de Albert Einstein[6].

Voltando ao equacionamento, das equações 3.019, 3.020, 3.021, resulta, visto ser $\tau(x,y,z,t)$ uma função linear que será representada apenas pelo símbolo τ, que:

$$\tau = a(t, x') \tag{3.022}$$

Onde *a*, trata-se de uma função a ser determinada.

Em função da suposição de um sistema linear e simplificando o cálculo, vamos também supor a seguinte função para τ:

$$\tau = k_1 t + k_2 x' \tag{3.023}$$

[6] O entendimento do valor para as velocidades V_L, nos eixos *Y'* e *Z'*, respectivamente iguais em módulo, mostrado na figura 4.3, pode ser esclarecido da seguinte forma. O movimento de um raio de luz, em velocidade *C*, no sentido do eixo *X'*, eixo este pertencente a um sistema *X'Y'Z'*, também em movimento de translação, em velocidade *V* em relação ao um sistema em repouso *XYZ*, no sentido positivo desse eixo, faz com que a velocidade teórica resultante nesse mesmo eixo *X* seja apenas *C-V*, uma operação algébrica já que essas velocidades *C* e *V* se encontram sobre o mesmo eixo. Agora, quando queremos saber sobre a projeção desse movimento do eixo *X* sobre os outros 2 eixos *Y* e *Z*, imaginamos o sistema *X'Y'Z'* se movendo no sentido positivo do eixo *X* e imaginamos também a projeção desse movimento se dando sobre os outros 2 eixos, porém estando a velocidade da luz, agora, vista de cada um dos eixos *Y* e *Z* como um feixe de luz emitido por uma lanterna, acesa, e iluminando a frente do raio de luz, porém direcionada não mais para a origem, mas para uma determinada posição sobre cada um dos eixos *Y* e *Z*. Matematicamente, a relação vetorial entre as velocidades será dada pela equação vetorial $\vec{C} = \vec{V} + \vec{V_L}$, onde as indicações da seta, sobre cada uma das variáveis, indica ser uma operação com a grandeza na sua forma vetorial.

Assim:

$$\partial\tau = \frac{\partial\tau}{\partial t}dt + \frac{\partial\tau}{\partial x'}dx' \qquad (3.024)$$

Por comparação entre as equações 3.022 e 3.023, podemos tirar as relações seguintes que consistem do procedimento comum de linearização de uma função em determinado ponto.

Assim:

$$k_1 = \frac{\partial\tau}{\partial t}\Big|_{dx'=0} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{\partial\tau}{\partial x'}\Big|_{dt=0}$$

Aplicando a equação diferencial 3.019 à função expressa pela equação 3.023 obteremos:

$$k_2 + \frac{V}{C^2 - V^2}k_1 = 0 \quad \therefore \quad k_2 = -\frac{V}{C^2 - V^2}k_1$$

Sendo k1 e k2 constantes arbitrárias a determinar, podemos assumir k1=1 o que nos leva diretamente a:

$$k_2 = -\frac{V}{C^2 - V^2}$$

Finalmente, a partir da equação 3.022, poderemos ter uma idéia do formato da função $\tau = a(t, x')$. Senão, vejamos:

$$\tau = a(t - \frac{V}{C^2 - V^2}x') \qquad (3.025)$$

Segundo Einstein, $\tau = a(t, x')$ é uma função $\varphi(V)$, por enquanto desconhecida e onde supomos, por brevidade, que, no ponto de origem, do sistema *K* ou *XYZ*, *t=0* para $\tau = 0$[7].

Com o auxílio desse resultado, vamos calcular as grandezas ξ, η, ζ, do sistema de coordenadas *K'*, exprimindo por meio de equações para as quais o valor para a velocidade da luz continua sendo igual a *C*, quando as medições se fazem no sistema em movimento. Segundo Einstein, o princípio da constância da velocidade da luz em combinação com o princípio da relatividade trata-se de uma exigência.

Para um raio de luz emitido no instante $\tau = 0$, no sentido constante crescente ou positivo de ξ, temos:

$$\xi = C\tau \quad \therefore \quad \xi = Ca(t - \frac{V}{C^2 - V^2}x') \qquad (3.026)$$

[7] Apenas relembrando, o sistema *K* é o sistema *XYZ* que estamos considerando em repouso enquanto que o sistema *K'* é o sistema *X'Y'Z'* em movimento com velocidade *V*.

Considerando que o raio de luz percorre a distância *x'*, no sistema de coordenadas *K'*, em relação ao sistema de coordenadas *K*, ele se moverá com uma velocidade *C-V*, num tempo *t* dado pela seguinte relação:

$$t = \frac{x'}{C - V} \tag{3.027}$$

Levando o valor de *t* da equação 3.027 na equação 3.026 obtemos a expressão para a grandeza ξ. Assim, temos que:

$$\xi = Ca\left(\frac{x'}{C - V} - \frac{V}{C^2 - V^2}x'\right) = Ca\frac{C}{C^2 - V^2}x'$$

Logo:

$$\xi = a\frac{C^2}{C^2 - V^2}x' \tag{3.028}$$

Mas é sabido que os sistemas de coordenadas se encontram em movimento relativo, isto é, o sistema *K'* em relação ao sistema *K* que se encontra em repouso.
Para as coordenadas do movimento no eixo *X* vem:

$$x = Vt + x' \quad \therefore \quad x' = x - Vt$$

Assim, para a equação 4.028 temos:

$$\xi = a\frac{C^2}{C^2 - V^2}(x - Vt) \tag{3.029}$$

De modo análogo, considerando o movimento do raio de luz nos outros 2 eixos, temos:

$$\eta = C\tau \tag{3.030}$$

$$\zeta = C\tau \tag{3.031}$$

Para a equação 3.030 temos:

$$\eta = C\tau \quad \therefore \quad \xi = Ca\left(t - \frac{V}{C^2 - V^2}x'\right)$$

Mas aqui, *x'=0*, pois estamos analisando o movimento sobre o eixo *Y*, logo teremos:

$$\eta = Cat$$

Como a velocidade da luz vista a partir do sistema em repouso *K*, de qualquer ponto ao longo do eixo *Y*, para o movimento que esteja ocorrendo no sistema móvel *K'*, é dada por $\sqrt{C^2 - V^2}$, condição explicada anteriormente, temos que:

$$t = \frac{y}{\sqrt{C^2 - V^2}}$$

Logo:

$$\eta = a\frac{C}{\sqrt{C^2 - V^2}}y \tag{3.032}$$

Do mesmo modo ocorrerá com a grandeza ζ referente ao eixo *Z*. Assim temos que:

$$\zeta = a\frac{C}{\sqrt{C^2 - V^2}}z \tag{3.033}$$

Partindo da premissa de que não deveria haver qualquer efeito entre as grandezas daqueles eixos não envolvidos no movimento, eixos *Y* e *Z*, a idéia é montar um padrão de transformação que seja representativo dessa idéia e que respeite tal condição.

Considerando os eixos *Y* e *Z*, podemos identificar o seguinte arranjo:

$$\eta = \varphi(V)y \tag{3.034}$$

$$\zeta = \varphi(V)z \tag{3.035}$$

Onde

$$\varphi(V) = a\frac{C}{\sqrt{C^2 - V^2}} \tag{3.036}$$

Para o eixo *X*, onde o movimento tem lugar, escrevemos:

$$\xi = \frac{\sqrt{C^2 - V^2}}{C}\varphi(V)\frac{C^2}{C^2 - V^2}x' = \frac{\sqrt{C^2 - V^2}}{C}\varphi(V)\frac{C^2}{C^2 - V^2}(x - Vt)$$

O que, depois de um rearranjo das variáveis, conduz à seguinte equação:

$$\xi = \varphi(V)\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}}(x - Vt)$$

Ou então de maneira mais simplificada:

$$\xi = \varphi(V)\beta(x - Vt) \tag{3.037}$$

Onde $\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}}$

Para o eixo dos tempos, pela equação 3.025, temos que:

$$\tau = a[t - \frac{V}{C^2 - V^2}(x - Vt)] = \frac{\sqrt{C^2 - V^2}}{C}\varphi(V)[t - \frac{V}{C^2 - V^2}(x - Vt)] \qquad (3.038)$$

Substituindo o valor de *a* da equação 3.036 na equação 3.038, após uma série de manipulações algébricas, obtemos:

$$\tau = \varphi(V)\beta(t - \frac{V}{C^2}x) \qquad (3.039)^8$$

Outra observação tem a ver com a adoção da posição inicial do sistema móvel que foi suposta sobre a origem dos tempos. Se não fizermos qualquer suposição sobre a posição inicial do sistema móvel *K'*, e nem sobre a origem adotada para fazermos a medição do tempo τ, será necessário escrever, no segundo membro de cada uma das equações de transformação, uma constante aditiva de compensação e de adequação.

Agora temos de comprovar, segundo Einstein, que todo raio de luz, medido no sistema em movimento *K'*, se propaga com a velocidade *C*, se, como vimos admitindo, assim suceder no sistema em repouso.

Suponhamos que no instante $t=\tau=0$, em que as origens das coordenadas dos 2 sistemas coincidem, seja emitida dessa origem uma onda esférica que se propaga no sistema de coordenadas *K*, sistema em repouso, com velocidade *C*.
Essa onda teria uma característica omnidirecional para melhor compreensão dos fatos.

Se for *(x,y,z)* um dos pontos que está sendo atingido pela onda, ele está associado à equação de uma esfera, então temos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = C^2 t^2 \qquad (3.040)$$

No processo de transformação entre os sistemas, *K* para *K'*, deveríamos ter:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = C^2 \tau^2 \qquad (3.041)$$

Agora, o ponto chave de todo desenvolvimento da Teoria da Relatividade será baseada na comprovação das equações 3.040 e 3.041, sem a qual as deduções realizadas até aqui se tornam sem efeito e inexeqüíveis.

As seguintes equações de transformação já foram obtidas e serão reescritas para a nossa comodidade, equações 3.044, 3.042, 3.043 e 3.045, nesta ordem:

$$\tau = \varphi(V)\beta(t - \frac{V}{C^2}x) \qquad (3.045)$$

$$\xi = \varphi(V)\beta(x - Vt) \qquad (3.044)$$

$$\eta = \varphi(V)y \qquad (3.042)$$

[8] Evidentemente que $\varphi(V)$ é uma função desconhecida até aqui.

$$\zeta = \varphi(V)z \tag{3.043}$$

Um ponto importante da transformação sugerida é que a métrica do sistema proposto seja válida, deste modo há que se provar a seguinte relação:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (C\tau)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (Ct)^2 \tag{3.046}$$

O sistema de equações precedente apresenta a particularidade de considerar o movimento acontecendo apenas sobre o eixo *X*, ou ao longo deste eixo.
Outra observação importante é que pela equação 3.040 anterior, do ponto de vista do observador em repouso a figura percebida no espaço trata-se de uma esfera.

Partindo do primeiro membro vamos tentar provar a validade da identidade anterior.

Trazendo as expressões para as grandezas ξ, η, ζ, τ das respectivas equações 3.036, 3.034, 3.035 e 3.037 obtemos que:

$$\begin{aligned}\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (C\tau)^2 = [\varphi(V)\beta(x - Vt)]^2 + [\varphi(V)y]^2 + [\varphi(V)z]^2 - \\ -\{C[\varphi(V)\beta(t - \frac{V}{C^2}x)]\}^2\end{aligned} \tag{3.047}$$

Desenvolvendo a equação 3.041 temos:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (C\tau)^2 = [\varphi(V)]^2 \{[\beta(x - Vt)]^2 + y^2 + z^2 - [\beta(Ct - \frac{V}{C}x)]^2\} =$$

$$= [\varphi(V)]^2 \{[\beta x - \frac{\beta V}{C}(Ct)]^2 + y^2 + z^2 - [\beta(Ct) - \frac{V}{C}x)]^2\} =$$

$$= [\varphi(V)]^2 \{[(\beta x)^2 + \frac{\beta^2 V^2}{C^2}(Ct)^2 - 2\frac{\beta^2 V}{C}x(Ct) + y^2 + z^2 - [\beta^2(Ct)^2 + \frac{\beta^2 V^2}{C^2}x^2 - 2\frac{\beta^2 V}{C}x(Ct)]\}$$

Promovendo as devidas simplificações e dispondo as parcelas de modo adequado temos que:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (C\tau)^2 = [\varphi(V)]^2 \{\beta^2(1 - \frac{V^2}{C^2})x^2 + y^2 + z^2 - \beta^2(1 - \frac{V^2}{C^2})(Ct)^2\} \tag{3.048}$$

Sendo $\beta^2 = \dfrac{1}{1 - V^2/C^2}$ a equação 4.048 simplificada torna-se a seguinte equação:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (C\tau)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - (Ct)^2 = 0 \tag{3.049}$$

A equação 3.049, pela teoria que estamos aqui apresentando, mostra que uma função *R*, em ambos os sistemas, considerando a propagação de uma onda eletromagnética ou um raio de luz, de característica esférica, é a mantida.

Para um observador em repouso que observa o sistema em movimento, segundo a equação anterior, ele veria uma espécie de elipsóide com a seguinte equação matemática, supondo que o movimento ainda se dê apenas no eixo X, como foi adotado até aqui:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \beta^2 x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad (3.050)$$

Também podemos admitir, em termos diferenciais, que:

$$(d\xi)^2 + (d\eta)^2 + (d\zeta)^2 - (Cd\tau)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (Cdt)^2 = 0 \qquad (3.051)$$[9]

As equações da transformação de Lorentz deduzem-se diretamente, com mais simplicidade, a partir da condição de que, por virtude delas, a relação seguinte:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (Ct)^2 = 0 \qquad (3.052)$$

Voltando ao tema, ao compararmos as equações 3.049 e 3.050, obtemos também:

$$\xi^2 + \eta^2 + \xi^2 - (C\tau)^2 = 0 \qquad (3.053)$$

Nas equações de transformação anteriores, uma função $\varphi(V)$ apareceu considerada até então como desconhecida. Vamos introduzir um novo sistema de coordenadas *K'* que efetue um movimento de translação paralelo ao eixo que corresponda ao eixo *X*, nesse novo sistema. Suponhamos também que este novo eixo se mova nessa direção com velocidade *–V*.

Considerando que as origens dos 3 sistemas de coordenadas coincidam em *t=0*, e considerando *t'=0* no sistema *K'* para $t = x = y = z = 0$.

Aplicando 2 vezes as equações de transformação 3.037, 3.036, 3.034, 3.035, vem:

$$t' = \varphi(-V)\beta(\tau + \frac{V}{C^2}\xi) \qquad (3.054)$$

$$x' = \varphi(-V)\beta(\xi - V\tau) \qquad (3.055)$$

$$y' = \varphi(-V)\eta \qquad (3.056)$$

$$z' = \varphi(-V)\zeta \qquad (3.057)$$

Por outro lado, considerando a propriedade da inversa entre os sistemas *K* e *K'*, podemos escrever que:

[9] A seguinte observação é vista na página 60, na forma de rodapé, da referência 2.

$$t' = \varphi(V)\varphi(-V)t \tag{3.058}$$

$$x' = \varphi(V)\varphi(-V)x \tag{3.059}$$

$$y' = \varphi(V)\varphi(-V)y \tag{3.060}$$

$$z' = \varphi(V)\varphi(-V)z \tag{3.061}$$

As relações anteriores levam em conta a condição suposta de que os sistemas de coordenadas *K* e *K'* encontram-se em repouso entre si. Por que isso acontece? Acontece isso porque na primeira transformação havia uma velocidade *V* entre o sistema das coordenadas *x*,*y*,*z*,*t* e o sistema de coordenadas ξ, η, ζ, τ. O terceiro sistema de coordenadas *x'*,*y'*,*z'*,*t'* introduzido encontra-se em movimento, porém com velocidade –*V*, dando a impressão de estar parado em relação ao primeiro sistema *x*,*y*,*z*,*t*.

Assim, se os sistemas *K* e *K'* se encontram em repouso entre si é de esperar que as relações entre as suas grandezas sejam independentes do tempo o que nos garante que:

$$\varphi(V)\varphi(-V) = 1 \tag{3.062}$$

Imaginemos, agora, um segmento do eixo *Y* limitado pelos pontos seguintes:

Ponto *1* → $\xi_1 = 0 \qquad \eta_1 = 0 \qquad \zeta_1 = 0$

Ponto *2* → $\xi_2 = 0 \qquad \eta_2 = L \qquad \zeta_2 = 0$

Este segmento considerado, trata-se de uma haste que se move em relação ao sistema *K* com velocidade *V* na direção de eixo *X*.

Em relação ao sistema *K*, os pontos anteriormente considerados teriam as seguintes coordenadas:

Ponto *1* → $x_1 = Vt \qquad y_1 = 0 \qquad z_1 = 0$

Ponto *2* → $x_2 = Vt \qquad y_2 = \dfrac{y'_2}{\varphi(V)} = \dfrac{L}{\varphi(V)} \qquad z_2 = 0$

Como o comprimento da barra não se modifica, se a velocidade *V* for substituída pelo valor –*V*, resulta que:

$$\frac{L}{\varphi(V)} = \frac{L}{\varphi(-V)}$$

Logo

$$\varphi(V) = \varphi(-V) \tag{3.063}$$

Sabendo também que $y_1 = y'_1$ vem que:

$$\varphi(V)y_1 = \varphi(-V)y'_1 \tag{3.064}$$

podemos escrever também que:

$$y_1 = y'_1 \qquad y_1 = \varphi(-V)y'_1$$

ou seja:

$$\varphi(V)y_1 = \varphi(-V) = 1$$

Deste modo, as equações 4.034, 4.035, 4.036, 4.037 serão reescritas do seguinte forma:

$$\tau = \beta(t - \frac{V}{C^2}x) \tag{3.065}$$

$$\xi = \beta(x - Vt) \tag{3.066}$$

$$\eta = y \tag{3.067}$$

$$\zeta = z \tag{3.068}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} \tag{3.069}$$

Imaginando agora a situação em que a observação seja feita a partir do sistema de coordenadas ξ, η, ζ, τ de modo que o sistema x,y,z,t é que esteja em movimento. Neste caso bastará tomarmos nas equações 3.057, 3.058, 3.059, 3.060, 3.061 o dual considerando a velocidade de movimento como sendo $-V$, isto é suficiente.

Assim temos que:

$$t = \beta(\tau + \frac{V}{C^2}\xi) \tag{3.070}$$

$$x = \beta(\xi + V\tau) \tag{3.071}$$

$$y = \eta \tag{3.072}$$

$$z = \zeta \tag{3.073}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} \tag{3.074}$$

Essas transformações listadas entre as equações 3.065 e 3.073 são universalmente conhecidas como Transformações de Lorentz[10].

[10] H. A. Lorentz, a partir de observações experimentais, propôs o sistema de equações que caracterizava e explicava os efeitos nos movimentos relativos das partículas elementares da matéria. As transformações de Lorentz, introduzidas por ele em 1904, descrevem o

Por outro lado, comparando as equações 3.065, 3.066, 3.067 e 3.068 com as suas respectivas variáveis associadas à transformação de coordenadas proposta, equações 3.070, 3.071, 3.072 e 3.073, é possível admitir que tal transformação não se trata de uma transformação equivalente, pelo menos dentro da definição de transformações estritamente equivalentes conhecidas.

3.2.4. Efeitos do Movimento Relativo

Imaginemos, agora, a questão da aplicação das equações que regem o princípio da relatividade sobre os sistemas físicos.

Seja imaginarmos 2 sistemas de coordenadas $K(x,y,z,t)$ e $K'(x',y',z',t')$.
Considerando que o sistema K' esteja se movendo em relação ao sistema K numa velocidade constante igual a V, na direção positiva do eixo X, conforme está mostrado na figura 3.2, e que existam relógios de luz em cada uma das origens de cada sistema e em repouso em relação a estas origens.
Se existirem, pelo menos, 2 relógios, sincronizados e colocados um em cada uma das origens, um segmento de reta será percorrido no eixo X entre os tempos t_1 e t_2, medidos no relógio do sistema K, perguntamos:

Qual seria a variação de tempo medido no relógio do sistema K em repouso para um observador localizado no sistema K' em movimento?

Solução aplicando o princípio da relatividade aqui discutido e desenvolvido.

Primeiramente temos de admitir que este problema é exatamente o mesmo problema que estamos estudando apenas que o tempo seria medido através da utilização de 2 relógios de luz sincronizados entre si.
Lembrando que a medição dos tempos é promovida no sistema K, que se encontra em repouso em relação ao sistema K', entre os tempos t_1 e t_2, medidos, ou seja, observação no sistema móvel, ou tempo próprio, com medição no sistema em repouso, ou tempo relativístico:

$$g(t,x,y,z) = f(\tau,\xi,\eta,\zeta)$$

A equação do tempo que nos servirá será aquela da equação 3.070, ou seja:

$$t_1 = \beta(t'_1 + \frac{V}{C^2}x') \qquad (3.075)$$

$$t_2 = \beta(t'_2 + \frac{V}{C^2}x') \qquad (3.076)$$

Notar que a medição dos tempos não envolve variações nos eixos XYZ, do sistema K e nem $X'Y'Z'$, do sistema K', uma vez que foram utilizados apenas instrumentos cronológicos.

Subtraindo as equações 3.075 e 3.076 vem que:

---

efeito de diminuição do comprimento, o aumento de massa e a dilatação do tempo para corpos que se movem a velocidades próximas da velocidade da luz.

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \beta(t'_1 - t'_2)'$$

$$\Delta t = \beta \Delta t'$$

Como $\beta > 1$ para uma dada velocidade *V*, podemos observar que para uma determinada medição pura de intervalo de tempo, no sistema em repouso, o tempo parece ser maior que o correspondente intervalo que se passou no sistema móvel. Trata-se do fenômeno conhecido como "dilatação do tempo" da teoria da relatividade.

Outra questão:

Qual seria a variação de espaço medido em régua colocada no sistema móvel *K'* para um observador localizado no sistema em repouso em seu próprio tempo?

Essa nova questão difere um pouco da questão anterior, pois lá a medição se dava no sistema de coordenadas *K* que se encontrava em repouso.
Agora aqui ocorre o oposto, queremos saber sobre o comprimento de um segmento de reta, ao longo do eixo *X*, medido no sistema de coordenadas *K'* que se encontra em movimento, ou seja, observação no sistema em repouso com medição no sistema móvel:

$$g(\tau, \xi, \eta, \zeta) = f(t, x, y, z)$$

A equação a ser usada é a equação 4.066 considerando dois pontos $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$.

Pela equação 3.066 vem que:

para o ponto P_1 → $x'_1 = \beta(x_1 - Vt)$ (3.077)

para o ponto P_2 → $x'_2 = \beta(x_2 - Vt)$ (3.078)

Notar que a medição da distância não envolve variações nos tempos, do sistema *K* e nem do sistema *K'*, uma vez que foi empregada apenas uma régua comum.

Subtraindo as equações 3.077 e 3.078 vem que;

$$\Delta x' = x'_1 - x'_2 = \beta(x_1 - x_2) = \beta \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{1}{\beta} \Delta x'$$

Como $\beta > 1$ para uma dada velocidade *V*, podemos observar que, para uma determinada medição pura de espaço, no sistema móvel, esse mesmo espaço, visto do sistema em repouso, parece ser menor que o correspondente medido. Trata-se do fenômeno conhecido como "encurtamento do espaço"[11].

[11] A referência 4 cita o fenômeno do encurtamento do espaço como sendo conhecido por "contração de Lorentz-Fitzgerald".

3.2.5. Cinemática Relativística

Para o estudo do efeito relativístico sobre a cinemática do ponto material, alguns princípios deverão ser definidos como invariantes, pois sem eles as condições de estruturação matemática seriam difíceis de serem concebidas.
Sendo assim, podemos afirmar que os seguintes princípios fundamentais são válidos:

a) a conservação de energia;

b) a conservação da quantidade de movimento;

c) a conservação do sentido de variação do tempo;

d) a conservação dos padrões de medida quando em repouso;

e) a utilização de relógios de luz.

Das equações 3.065 – 3.074 serão retiradas as relações que fornecerão as fórmulas das velocidades, fórmulas essas necessárias ao estudo.

Da equação 3.071 vem que:

$$x = \beta(\xi + V\tau) \quad \text{com } \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}}$$

Derivando a equação anterior com relação ao tempo *t*, levando em conta a constância de β, vem:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \beta(\frac{d\xi}{dt} + V\frac{d\tau}{dt}) = \beta(\frac{d\xi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} + V\frac{d\tau}{dt})$$

Logo:

$$V_x = \beta(V_\xi \frac{d\tau}{dt} + V\frac{d\tau}{dt}) \quad \therefore \quad V_x = \beta(V_\xi + V)\frac{d\tau}{dt} \qquad (3.079)$$

Da equação 3.070 vem que:

$$t = \beta(\tau + \frac{V}{C^2}\xi)$$

Derivando a equação anterior com relação ao tempo *t*, levando em conta a constância de β, vem:

$$\frac{dt}{dt} = \beta(\frac{d\tau}{dt} + \frac{V}{C^2}\frac{d\xi}{dt}) = \beta(\frac{d\tau}{dt} + \frac{V}{C^2}\frac{d\xi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt})$$

Logo:

$$1 = \beta(1 + \frac{V}{C^2}\frac{d\xi}{d\tau})\frac{d\tau}{dt} = \beta\frac{d\tau}{dt}(1 + \frac{V}{C^2}V_\xi)$$

Assim:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\beta(1 + \frac{V}{C^2}V_\xi)} \tag{3.080}$$

Levando a expressão de $\frac{d\tau}{dt}$ da equação 3.080 na equação 3.079, vem:

$$V_x = \beta(V_\xi + V)\frac{1}{\beta(1 + \frac{V}{C^2}V_\xi)}$$

Simplificando:

$$V_x = \frac{(V_\xi + V)}{(1 + \frac{V}{C^2}V_\xi)} \tag{3.081}$$

Para a velocidade no eixo *Y* é obtida a seguinte expressão a partir da derivada da equação 3.072 em relação ao tempo *t*:

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}$$

Trazendo na equação anterior a expressão de $\frac{d\tau}{dt}$ da equação 3.080, vem:

$$V_y = V_\eta \frac{1}{\beta(1 + \frac{V}{C^2}V_\xi)}$$

Assim:

$$V_y = \frac{V_\eta}{\beta(1 + \frac{V}{C^2}V_\xi)} \tag{3.082}$$

Analogamente para o eixo *Z*, vem:

$$V_z = \frac{V_\zeta}{\beta(1 + \frac{V}{C^2} V_\xi)} \tag{3.083}$$

As equações 3.081, 3.082, 3.083 se referem a medições realizadas no sistema móvel $K'(\xi, \eta\ \zeta, \tau)$ cujos valores foram transferidos para o sistema $K(x,y,z,t)$ que, para nós, se encontra em repouso, mediante a regra de transformação ditada pela Teoria da Relatividade.
Considerando, agora, a medição feita a partir do sistema de coordenadas $K(x,y,z,t)$, em repouso, bastará utilizarmos das mesmas equações transformadas tomando antes o cuidado de trocar V por $-V$.
A questão da troca já foi aventada anteriormente neste trabalho e leva em conta, principalmente, a questão do efeito relativo dos movimentos, pois se um sinal se move para frente com uma determinada velocidade, este mesmo sistema pode ser considerado em repouso vendo o outro sistema se afastar, porém na direção oposta. O próprio Albert Einstein se utilizou desse artifício, antes.

Deste modo, as equações para a nova situação serão as seguintes:

$$V_\xi = \frac{(V_x - V)}{(1 - \frac{V}{C^2} V_x)} \tag{3.084}$$ [12]

$$V_\eta = \frac{V_y}{\beta(1 - \frac{V}{C^2} V_x)} \tag{3.085}$$

$$V_\zeta = \frac{V_z}{\beta(1 - \frac{V}{C^2} Vx)} \tag{3.086}$$

Será promovida agora a devida análise da questão da quantidade de movimento dentro da cinemática relativística. Para tal, será adotada a condição na qual um ponto material, de massa m_o, quando em repouso com relação a um sistema, é considerado e passaremos a efetuar o cálculo quando houver a aceleração desse ponto material.
Colocaremos nesse ponto material de massa m os eixos de um sistema de coordenadas $\bar{K}(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t})$, enquanto que o sistema de coordenadas $K(x,y,z,t)$ representará aquele sistema de referência e em repouso em relação ao primeiro[13].
A partir dessa notação, então, podemos escrever as equações de transformação seguindo o procedimento de Albert Einstein, conforme os 2 sistemas de coordenadas.

Tomando como base a transformação ditada pelas equações 3.070-3.074, vem que:

$$t = \beta(\bar{t} + \frac{V}{C^2} \bar{x}) \tag{3.087}$$

[12] Lembramos que o sinal do parâmetro β não se altera quando trocamos V por $-V$.

[13] As notações $\bar{X}$ e x seguem a mesma notação adotada por Murray Spiegel, ver referência 4.

$$x = \beta(\bar{x} + V\bar{t}) \tag{3.088}$$

$$y = \bar{y} \tag{3.089}$$

$$z = \bar{z} \tag{3.090}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}}$$

Imaginemos um caso particular quando trabalhamos com o chamado "*tempo próprio do fenômeno*", o que em termos matemáticos significa tomar as coordenadas $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$. Fisicamente isso significa a colocação da medição do tempo na origem do sistema $\bar{K}$ que por ora se encontra em movimento em relação ao sistema K, que está em repouso.

Vamos definir a equação para a métrica no espaço formado pelo sistema *K* e um ponto genérico de coordenadas *P(x,y,z,t)*[14].

A norma será:

$$(ds)^2 = (Cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \tag{3.091}$$

Como: $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0 \quad \therefore \quad d\bar{x} = d\bar{y} = d\bar{z} = 0$

Podemos escrever que:

$$(d\bar{s})^2 = (Cd\bar{t})^2 = (ds)^2$$ [15]

Como $d\bar{s} = ds$ vamos designar apenas por ds nas próximas deduções. Deste modo:

$$(ds)^2 = C^2(d\bar{t})^2$$

e

$$ds = C\,d\bar{t} \tag{3.092}$$

Da equação 3.087, que rege a transformação dos tempos entre os sistemas K e $\bar{K}$, a partir do sistema K, temos que:

para $\bar{x} = 0$ ser $d\bar{x} = 0$, com $t = \beta\bar{t}$ e também:

$$dt = \beta\,d\bar{t} \tag{3.093}$$

[14] Como podemos ver, o espaço de nossa transformação de coordenadas trata-se de um espaço especial caracterizado por um sistema quadrivetor também conhecido como "espaço de Minkowski". Portanto, não se pode esquecer que esta transformação não se dá num sistema cuja métrica seja a métrica do espaço euclideano, mas sim numa métrica pseudo-euclideana.

[15] Não podemos deixar de esquecer que as transformações aqui postuladas devem ser do tipo ortogonal e que os valores de suas métricas se equivalem.

A partir das equações 4.092 e 4.093 obtemos a importante relação de tempos:

$$ds = \frac{C}{\beta} dt \qquad (3.094)^{16}$$

Observação Importante!
O objetivo desse artifício algébrico, na realidade, foi conseguir levar a influência do parâmetro β para as equações futuras que utilizaremos na composição da fórmula de energia quando for explorada a dinâmica relativística. Com a presença do parâmetro β dentro das equações de velocidade dos 4 eixos será possível analisar os efeitos da aceleração sobre a massa de um ponto material. Em outras palavras, provar a famosa equação de energia $E = m_o C^2$.

Deste modo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{\frac{\beta}{C} ds} = \frac{C}{\beta}\frac{dx}{ds} = V_x \qquad \therefore \qquad \frac{C}{\beta} u_x = V_x$$

Logo:

$$u_x = \frac{\beta}{C} V_x \qquad (3.095)$$

Analogamente, considerando os eixos *Y* e *Z*, vem:

$$u_y = \frac{\beta}{C} V_y \qquad (3.096)$$

$$u_z = \frac{\beta}{C} V_z \qquad (3.097)$$

E para o eixo do tempo temos que:

$$\frac{d(Ct)}{dt} = \frac{d(Ct)}{\frac{\beta}{C} ds} = \frac{C}{\beta}\frac{d(Ct)}{ds} = \frac{C}{\beta} u_{ct} = CV_t \qquad \therefore \qquad \frac{1}{\beta} u_{ct} = V_t$$

Como $V_t = 1$ vem:

$$u_{ct} = \beta \qquad (3.098)$$

As equações 3.095-3.098 trazem uma representação especial para as velocidades do ponto material dos nossos sistemas $K - \overline{K}$, nos 4 eixos, agora com uma escolha particular da diferencial, de modo que o parâmetro β aparecesse influenciando nos cálculos.

[16] Lembramos que o incremento *ds*, trata-se de um incremento de um pseudo-tempo que nos será muito importante na definição de uma nova representação de velocidade.

De maneira geral, podemos reunir as equações de velocidade 3.094 – 3.098 no seguinte agrupamento de equações:

$$u_{x,y,z} = \frac{\beta}{C} V_{x,y,z}$$
$$uct = \beta$$

Caso queiramos colocar em uma única equação:

$$u_{x,y,z,ct} = \frac{\beta}{C} V_{x,y,z,ct} \qquad (3.099)$$

Com $u_{ct} = \frac{\beta}{C} \frac{d(Ct)}{dt}$

3.2.6. Dinâmica Relativística

Vamos fazer uso, a partir daqui, do conceito relativo à 2ª. Lei de Newton ou lei da aceleração e da força.
A idéia é encontrar uma expressão única para a força aplicada a uma partícula material, em movimento, de modo que seja possível considerar a massa desta partícula não como um invariante, mas como uma grandeza que possa ser convertida parcialmente ou totalmente em energia, em outras palavras, considerar a possibilidade de haver variação da massa.

A fórmula genérica para a 2ª. Lei de Newton é a seguinte, somente à guisa de informação:

$$f = \frac{d(mv)}{dt}$$

Na fórmula anterior da força, *m* é a massa e *v* é a velocidade, lembrando apenas que o produto *mv*, trata-se da grandeza conhecida como quantidade de movimento.

Desenvolvendo a equação anterior, vem que:

$$f = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

É evidente que Isaac Newton considerou, em sua a 2ª. Lei aplicada à dinâmica do ponto material, que a segunda parcela do segundo membro da equação anterior era nula, pois ele trabalhou com a idéia de massa inercial, ou seja, massa em repouso.
Para o nosso caso, essa parcela não será desprezada e será calculada a partir da dinâmica relativística.

Primeiramente vamos eleger a grandeza ϕ como sendo uma força análoga para a composição da velocidade *u* considerando a diferencial *ds* definida anteriormente.

Deste modo, podemos escrever a equação análoga à 2ª. Lei de Newton para o movimento de uma partícula de massa inercial ou massa repouso m_o.

Assim:

$$\phi_{x,y,z,ct} = \frac{d}{ds}(m_o u_{x,y,z,ct}) \tag{3.100}$$

Sabemos também, da equação 3.094,

a diferencial $ds = \frac{C}{\beta}dt$ o que nos permite escrever para a equação 3.100 que:

$$\phi_{x,y,z,ct} = \frac{\beta}{C}\frac{d}{dt}(m_o u_{x,y,z,ct})$$

Porém, trazendo da equação 4.099 a expressão de $u_{x,y,z,ct}$, a equação anterior ficará da seguinte forma:

$$\phi_{x,y,z,ct} = \frac{\beta}{C}\frac{d}{dt}(m_o \frac{\beta}{C} v_{x,y,z,ct})$$

$$\phi_{x,y,z,ct} = \frac{\beta}{C^2}\frac{d}{dt}(m_o \beta v_{x,y,z,ct}) \tag{3.101}$$

A força total que vai agir sobre a partícula material será a composição das forças segundo os eixos X,Y,Z.

Uma função genérica para a questão da força atuante, em função dos elementos até aqui apresentados, pode ser representada pela equação seguinte:

$$f_{x,y,z,ct} = \frac{C^2}{\beta}\phi_{x,y,z,ct} = \frac{d}{dt}(m_o \beta v_{x,y,z,ct}) \tag{3.102}$$

É fácil chegarmos à conclusão anterior bastando para tal separar os membros da equação 3.101.

Na equação 3.102 podemos ainda identificar uma importante grandeza, por definição, "força inercial" $f_{x,y,z,ct}$ cuja fórmula é repetida a seguir:

$$f_{x,y,z,ct} = \frac{C^2}{\beta}\phi_{x,y,z,ct} \tag{3.103}$$

Considerando agora o princípio da invariância da medição baseada na métrica adotada para os sistemas $K - \overline{K}$, assim como na equação 3.091, a nova representação em $u_{x,y,z,ct}$ também deverá obedecer a esse princípio.

Então vale a seguinte relação:

$$(ds)^2 = -(dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 + (Cdt)^2 \quad \text{com } ds = \frac{C}{\beta}dt$$

$$u_x = \frac{\beta}{C} V_x \quad \therefore \quad v_x = \frac{C}{\beta} u_x \quad \therefore \quad \frac{dx}{dt} = \frac{C}{\beta} u_x \quad dx = \frac{C}{\beta} u_x \, dt$$
$$u_y = \frac{\beta}{C} V_y \quad \therefore \quad v_y = \frac{C}{\beta} u_y \quad \therefore \quad \frac{dy}{dt} = \frac{C}{\beta} u_y \quad dy = \frac{C}{\beta} u_y \, dt$$
$$u_z = \frac{\beta}{C} V_z \quad \therefore \quad v_z = \frac{C}{\beta} u_z \quad \therefore \quad \frac{dz}{dt} = \frac{C}{\beta} u_z \quad dz = \frac{C}{\beta} u_z \, dt$$

Com essas expressões anteriores, a equação 4.091 tomará a seguinte forma:

$$(ds)^2 = \frac{C^2}{\beta^2}(dt)^2 = \frac{C^2}{\beta^2}[-(u_x)^2(dt)^2 - (u_y)^2(dt)^2 - (u_z)^2(dt)^2 + (u_{ct})^2(dt)^2]$$

Simplificando a expressão da equação anterior vem:

$$1 = -(u_x)^2 - (u_y)^2 - (u_z)^2 + (u_{ct})^2 \tag{3.104}$$

Derivando a equação 3.104 em relação ao tempo *t* obteremos:

$$u_x \frac{du_x}{dt} + u_y \frac{du_y}{dt} + u_z \frac{du_z}{dt} = u_{ct} \frac{du_{ct}}{dt} \tag{3.105}$$

Trazendo até a equação 3.105 as expressões de $u_{x,y,z,ct}$ das equações 3.095-3.097 e multiplicando membro a membro dessa equação por m_o, correspondente à massa em repouso, vem:

$$u_x \frac{d}{dt}(\frac{\beta}{C} m_0 v_x) + u_y \frac{d}{dt}(\frac{\beta}{C} m_0 v_y) + u_z \frac{d}{dt}(\frac{\beta}{C} m_0 v_z) = u_{ct} \frac{d}{dt}(\frac{\beta}{C} m_0 v_{ct})$$

Simplificando:

$$u_x \frac{d}{dt}(\frac{\beta}{C} m_0 v_x) + u_y \frac{d}{dt}(\frac{\beta}{C} m_0 v_y) + u_z \frac{d}{dt}(\frac{\beta}{C} m_0 v_z) = u_{ct} \frac{d}{dt}(\beta m_0)$$

Ou ainda:

$$u_x \frac{d}{dt}(\beta m_0 v_x) + u_y \frac{d}{dt}(\beta m_0 v_y) + u_z \frac{d}{dt}(\beta m_0 v_z) = u_{ct} \frac{d}{dt}(C\beta m_0) \tag{3.106}$$

Porém, considerando a aplicação da 2ª. lei de Newton, vem que:

$$f_x = \frac{d}{dt}(\beta m_0 v_x) \tag{3.107}$$

$$f_y = \frac{d}{dt}(\beta m_0 v_y) \tag{3.108}$$

$$f_z = \frac{d}{dt}(\beta m_0 v_z) \tag{3.109}$$

$$f_{ct} = \frac{d}{dt}(\beta m_0 C) \tag{3.110}$$

As equações 3.107-3.110 representam as expressões para as forças, decompostas segundo cada um dos eixos *X*, *Y*, *Z*, *Ct*, da força resultante que está agindo sobre a partícula de massa m_o, em função de seu movimento.

Considerando as equações das forças atuantes dadas pelas equações 3.107-3.110, a equação 3.106 tomará o seguinte aspecto:

$$f_x u_x + f_y u_y + f_z u_z = f_{ct} u_{ct} \tag{3.111}$$

Sendo $u_{ct} = \beta$, basta conferirmos a equação 4.098 anterior, equação 3.111 ficará da seguinte forma:

$$f_x u_x + f_y u_y + f_z u_z = \beta f_{ct}$$

Considerando, agora, as expressões de u_x, u_y, u_z das expressões 3.095-3.097, a equação anterior passará a ter o seguinte aspecto:

$$\frac{\beta}{C} v_x f_x + \frac{\beta}{C} v_y f_y + \frac{\beta}{C} v_z f_z = \beta f_{ct}$$

A equação anterior nos permite escrever:

$$f_{ct} = \frac{1}{C}(f_x v_x + f_y v_y + f_z v_z) \tag{3.112}$$

Na equação 3.112, o somatório do produto *fv* nada mais é do que a potência. Assim podemos entender que a equação 3.112, trata-se da potência *P* desenvolvida no trajeto da partícula e que podemos resumir da seguinte forma:

$$P = C f_{ct} = C \frac{d}{dt}(m_0 \beta C)$$

De outra forma, ou seja, em função da energia, desenvolvida, vem:

$$P = \frac{dE}{dt} = C \frac{d}{dt}(m_0 \beta C) = \frac{d}{dt}(m_0 \beta C^2)$$

Sendo *E* a energia gasta nesse trabalho mecânico.

Colocando a expressão anterior na forma de uma equação diferencial, obtemos:

$$dE = d(m_0 \beta C^2)$$

Integrando a equação diferencial anterior, concluímos que:

$$\int_0^E dE = \int_{\beta=1}^{\beta} d(m_0 \beta C^2)$$

Resolvendo a integral:

$$E = m_0(\beta - 1)C^2 \qquad (3.113)$$

A equação 3.113, trata-se da fórmula para a energia cinética desenvolvida por uma suposta partícula material cuja massa em repouso é m_0, estando sob uma velocidade *V*, onde:

$\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/C^2}}$ sendo $C = 3 \times 10^8$ *m/s* [velocidade da luz no vácuo].

Existem 2 extremos que vamos analisar agora.

O primeiro extremo seria aquele associado a uma condição na qual a partícula se move em baixa velocidade, ou seja, numa condição tal que $v \ll C$, ou seja, ainda, a partícula esteja se movendo numa velocidade muito abaixo da velocidade da luz, *10 m/s*, por exemplo.

Para tal vamos nos apoiar num subsídio bem comum. Vamos aplicar o desenvolvimento da série de Mac Laurin à expressão do parâmetro β.

Assim teremos:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/C^2}} = [1 - v^2/C^2]^{-\frac{1}{2}}$$

A série de Mac Laurin permite-nos, considerando V uma variável, o seguinte desenvolvimento:

$$[1 - \frac{v^2}{C^2}]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(\frac{v}{C})^2 + \frac{3}{8}(\frac{v}{C})^4 + \frac{15}{48}(\frac{v}{C})^6 + \cdots \qquad (3.114)$$

Para $v \ll C$ adotaremos o método de promover o truncamento da série de modo que a equação 4.114 seja aproximada para a seguinte relação:

$$\beta = [1 - \frac{v^2}{C^2}]^{-\frac{1}{2}} \cong 1 + \frac{1}{2}(\frac{v}{C})^2 \qquad (3.115)$$

Levando a expressão de β da equação anterior 4.115 na equação 4.113 a expressão para a energia passará a ter a seguinte forma:

$$E = m_0 [1 + \frac{1}{2}(\frac{v}{C})^2 - 1] C^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Ou seja $E = \frac{1}{2} m_0 v^2$ que se trata da fórmula para a energia cinética de um corpo se movendo a uma velocidade $v << C$, ou seja, no ambiente da Terra, por exemplo.

O segundo extremo seria utilizarmos de um acelerador de partículas, por exemplo, fazendo com que a massa m_0 atinja uma velocidade da ordem da velocidade da luz no vácuo. Trata-se de uma situação teórica, porém considerando a equação 4.113, com $v \rightarrow C$ e, por conseguinte, $\beta \rightarrow \infty$, o que implicaria no despendimento de uma energia infinita, ou simplesmente $E \rightarrow m_0 \beta C^2$, ou seja, $E \rightarrow \infty$.

Uma observação importante a fazer tem a ver com a questão da aceleração da partícula material de massa m_0 por enquanto esta estiver em repouso. Em termos de variação de massa, em função dessa aceleração, podemos escrever a seguinte relação das massas m_0, enquanto a partícula se encontrar em repouso, e aquela massa m associada ao movimento dessa partícula com velocidade v.

Assim:

$$m = \beta m_0$$

Ou seja:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \qquad (3.116)$$

Através do procedimento da Teoria da Relatividade apresentado nesse pequeno trabalho chegamos a importante relação da equação 4.116 que mostra que a 2ª. lei de Newton, trata-se de uma particularidade quando é adotado o princípio da invariância da massa como ente físico.
Quando é considerada a Teoria da Relatividade, com base nos fundamentos até aqui abordados, provamos que a massa de uma partícula sofre variação em função da velocidade com que ela venha a ser animada e segue uma relação de velocidades, sendo a velocidade da luz no vácuo um valor, considerado por A. Einstein, um limite.

Na equação 3.113, a energia E é denominada energia cinética relativística e é a diferença entre a energia total dada pela relação $m_0 \beta C^2$ e a energia de repouso dada pela famosa relação $m_0 C^2$.

Assim, para a energia em repouso, de uma partícula material, teremos que:

$$E = m_0 C^2 \tag{3.117}$$

4. DISCUSSÃO SOBRE A TEORIA DA RELATIVIDADE

4.1. Com Respeito ao Desenvolvimento da Idéia Relativística

É evidente que Albert Einstein já tinha em mãos aquilo que queria comprovar, ou seja, as ditas transformações de Lorentz. É claro que H. A. Lorentz já havia notado, por intermédio de análises, de verificação, de ensaios, entre outras observações, que a mecânica newtoniana não atendia às circunstâncias em que tais verificações eram realizadas, verificações essas que constavam da análise de movimentos de partículas elementares da matéria tais como léptons, quarks, etc., quando sujeitas a certas circunstâncias.
Em pelo menos uma das observações [17], aquela que envolvia a aceleração de partículas a velocidades próximas à velocidade da luz, era notada a alteração da massa da partícula. Do mesmo modo, G. F. Fitzgerald, em 1894, descobriu o efeito do acréscimo de velocidade sobre os corpos em movimento, o que chamamos de contração Lorentz-Fitzgerald, um fenômeno que ocorre com os corpos cujo movimento se aproxima da velocidade da luz.

4.2. Com Respeito à Questão dos Raios Cósmicos que Atingem a Terra

Mais recentemente, outro fenômeno tem chamado a atenção dos estudiosos. É interessante notar o resultado de observações realizadas no processo de decaimento de certas partículas elementares de segunda geração chamadas de múons quando tais partículas, provenientes do espaço cósmico, penetram a atmosfera terrestre. A referência 7 nos fornece os dados principais desse evento já devidamente catalogado.
Um múon tem a sua vida média de apenas $2{,}2\mu s$ e seria impossível que essa partícula viajasse mais de *15Km*, referentes à espessura da atmosfera terrestre, sem se decair antes de atingir o solo, assim como é percebido o evento na Terra. Teria de viajar a quase *22,7* vezes a velocidade da luz para tal. Por outro lado, considerando a velocidade da luz, além de constante, um limite superior, notamos que o tempo para um múon percorrer os *15Km* seria de aproximadamente $50{,}54\mu s$, um valor de tempo de $50{,}54/2{,}2 \cong 22{,}97$ vezes maior que o tempo de vida média do múon, uma impossibilidade a primeira vista!!! Mas o múon se vê a si mesmo percorrendo uma distância de vt, onde t é o tempo decorrido no seu sistema de coordenadas [tempo próprio do evento] e $v \cong c$ é a sua velocidade. Sob o seu ponto de vista, o múon viajou aproximadamente *660m* antes de decair. Este seria então o valor de comprimento máximo em que o múon poderia percorrer ainda existindo como múon, ou seja, antes de se decair em outra subpartícula ou outras subpartículas. Para ele, um espaço percorrido de *15Km* de espessura, na Terra, teria um outro significado considerando o tempo próprio do fenômeno no sistema do próprio múon.
Como sabemos, o movimento relativístico admite o parâmetro β que pode ser visto na equação 4.116. Ainda da referência 7, é disponibilizada a relação de massas da partícula múon, nas condições em repouso e em movimento próximo da velocidade da luz na superfície do mar, onde $m_0 = 105{,}658\ MeV/C^2$ e $m = 5MeV/C^2$, respectivamente, o que nos fornece o parâmetro $\beta = 47{,}32$. Embora seja considerada a velocidade da luz nos nossos cálculos, o certo é que tais eventos ocorrem em velocidades de cerca de 99,999...% da velocidade da luz, pois a velocidade da luz mesma seria inatingível, pois exigiria,

[17] A chamada massa variável de Lorentz foi abordada na teoria de Abraham da massa variável e com o experimento de Walter Kaufmann sobre a massa de elétrons em alta velocidade e a não-conservação de energia em experimentos da eminente física Marie Curie com o elemento químico Rádio.

teoricamente, uma energia infinita para a sua consecução, em outras palavras, trata-se de uma singularidade.
Considerando a distância de *15Km* da camada da atmosfera terrestre, o equivalente deste valor no sistema próprio da partícula em movimento próximo à velocidade da luz seria de $15.000/47,32 \cong 316,99m$.
Deste modo, o tempo transcorrido no sistema próprio da partícula para que o múon percorra esses *316,99m* seria de $316,99/3x10^8 \cong 1,056\mu s$. Esse tempo, por ser inferior ao tempo máximo de $2,2\mu s$ exigido no decaimento, garante que boa parte dos múons incidentes sobre a atmosfera terrestre atinja a superfície do planeta.

4.3. Com Respeito ao Desenvolvimento da Equação Diferencial dos Tempos Item 3.2.3

Quando concluímos que existe uma diferença de cálculos entre a mecânica clássica de Newton e a mecânica relativística, elaborada a partir da Teoria da Relatividade, isso não quer dizer que estas variações são todas reais. Reais são aquelas medições realizadas na superfície da Terra, enquanto que as medições originárias do processo relativístico são aparentes para um observador posicionado na superfície terrestre. As variações se dão por conta do fenômeno aparente gerado pelo efeito relativo, descrito pela Teoria da Relatividade, e que tem sua origem no processo de medição que é promovido através da utilização do movimento do percurso de um raio de luz ou de uma onda eletromagnética, em outras palavras, não são utilizados relógios mecânicos de cabelo ou de pêndulo nas medições ou experimentos. Os relógios sempre utilizados são os relógios de luz já referenciados nesse trabalho.

Tomemos o raciocínio elaborado a partir das equações 3.005-a,b, anteriormente descritas.
A questão das diferenças dos tempos tem um detalhe em sua elaboração e isso pode ser facilmente descrito através de cálculos que serão mostrados a partir da análise da figura 4.1 seguinte.

Quando Einstein optou por realizar as medições das distâncias através do espaço percorrido por um raio de luz ele, na realidade, queria realizar essa medida segundo um procedimento que lhe garantisse certa consistência uma vez que ele bem o sabia o que desejava, é claro. A utilização de instrumentos cuja dinâmica se desenvolvesse de maneira mais lenta que a dinâmica daquilo que pretendesse medir seria um erro que o próprio Einstein já havia percebido. Daí a idéia da utilização de um agente independente do referencial, mas que fosse, de certo modo, invariável e rápido o suficiente em seu processo de medição. O que no universo poderia ser utilizado senão a dinâmica da onda eletromagnética que, além de rápida e constante, se propaga no vácuo interestelar segundo a teoria eletromagnética de Maxwell. Por isso, a base adotada para a medição das distâncias no sistema proposto na Teoria da Relatividade leva em conta a velocidade da luz tomada como uma constante.
Agora, devemos ter em mente que a elaboração das equações 3.005-a,b, anteriormente descritas, parte de uma suposição, se assim podemos dizer.
Repetindo as equações aqui, observamos que Einstein considerou que a distância a ser percorrida pelo raio de luz, em ambos os sentidos, era sempre o mesmo, porém isso não é o que ocorrerá na realidade.
Considerando a haste em movimento de translação, retilíneo, na direção do eixo *X*, as velocidades relativas são *C-V* e *C+V*, respectivamente no sentido positivo do eixo e no sentido negativo, porém as distâncias percorridas pelo raio de luz serão diferentes de *L*.

$$t_B - t_A = \frac{L}{C - V}$$

$$t'_A - t_B = \frac{L}{C + V}$$

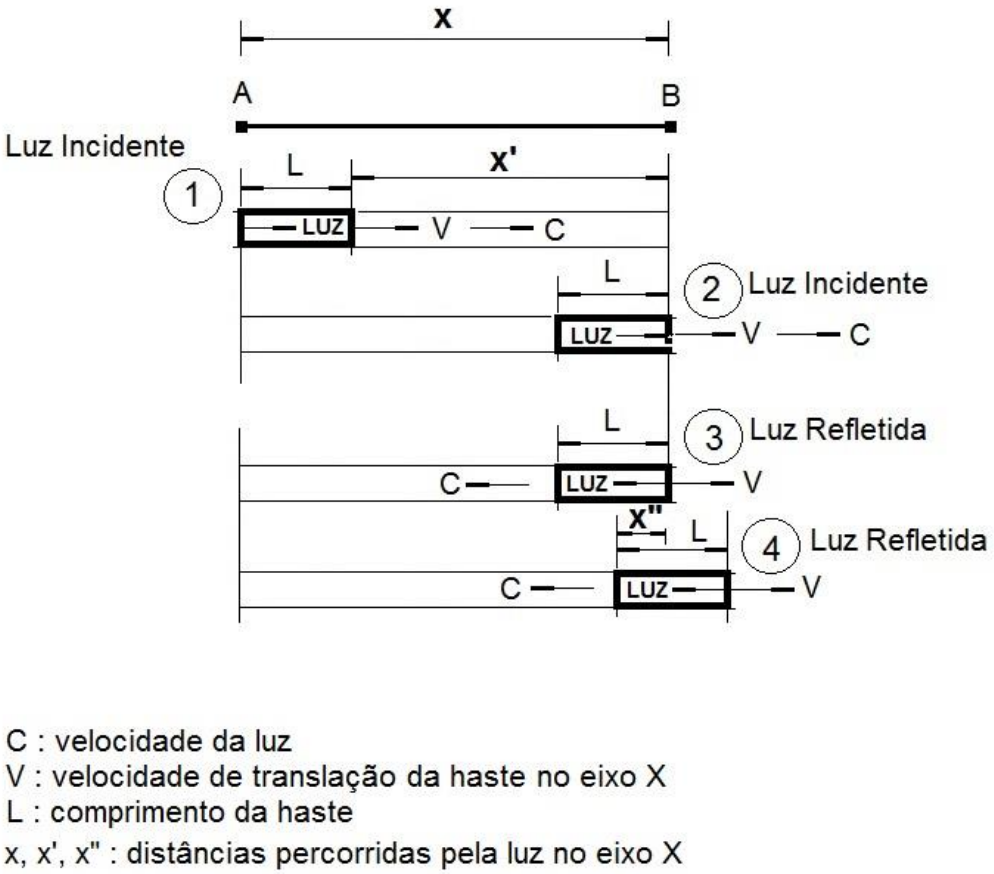


FIGURA 4.1 – Movimento da haste no eixo X

Explicando o movimento que foi adotado na demonstração, notar pela figura 4.1 que os 4 momentos assinalados representam as 4 principais fases em que podemos medir o comprimento da haste. Entendemos como raio incidente aquele raio de luz que parte de um ponto em direção ao outro ponto, e por raio refletido aquele raio de luz que se refletiu e encontra-se em movimento de retorno ao ponto inicial de emissão. Em 1 o raio de luz sai do ponto A e somente chegará ao ponto B na condição de raio incidente, em 2, após percorrer a distância *x* e não a distância *L* como foi considerada por Einstein. Neste trecho a velocidade relativa é *C-V*, como esperada. Em 3, o raio de luz sai do ponto B e, retornando, chegará ao ponto A, na condição de raio refletido, em 4, após percorrer a distância *x"* e não a distância *L* como foi considerada, novamente, por Einstein. Neste trecho a velocidade relativa é *C+V*, também como esperada.

Considerando a figura 4.1, as relações de tempos serão agora:

$$t = \frac{x}{C - V} \qquad (4.001\text{-a})$$

$$t' = \frac{x''}{C + V} \qquad (4.001\text{-b})$$

Notamos que as variáveis *x* e *x''*, nas equações anteriores 4.001 a-b, não são exatamente o comprimento da haste, pois ela (haste) encontra-se em movimento. Trata-se de distâncias que seriam supostamente percorridas ora no sentido positivo do eixo *X* ora no sentido negativo, porém com diferentes velocidades como já foi dito antes. Foi por isso que o próprio Einstein, na equação diferencial parcial 3.015, introduziu uma diferencial $\partial\tau \neq 0$.

Na nossa análise anterior percebemos, facilmente, que $x > x''$ e que $(C\text{-}V) < (C+V)$ o que nos garante que $t > t''$, *ou seja,* $t \neq t''$, pelo menos em teoria.

4.4. Com Respeito ao Aparecimento da Quarta Dimensão em Ct

Embora a aplicação do conceito do espaço de Minkowski , um espaço pseudo-euclideano no qual a Teoria da Relatividade se fundamenta, seja o sistema de coordenadas utilizado, tal sistema não poderia ser admitido desde o início como uma causa determinante ou inconteste.

É evidente que desde o início, tanto Lorentz quanto Minkowski , ao admitirem um sistema de coordenadas do tipo de um quadrivetor para a análise da cinemática do ponto material, também admitiram a possibilidade da Teoria da Relatividade, pelo menos na conclusão desta.

Sem querer entrar na questão do mérito, o que se observa é que uma coisa está dentro da outra, o artigo de Einstein, a postulação do espaço de Minkowski e as transformações de Lorentz, sem contar as idéias contidas na suposição da contração de Lorentz-Fitzgerald.

No fundo, o aparecimento da quarta dimensão dentro da dinâmica do ponto material de Newton só foi possível a partir de experimentos que fundamentaram e embasaram a teoria.

Por que apareceu essa 4ª. dimensão? Ela apareceu no instante em que foi aventada a possibilidade da existência da diferença entre os tempos medidos na experiência idealizada no item 3.2.2, precedente, que tratou da relatividade de comprimentos e tempos. A equação $\frac{1}{2}\partial\tau_2 - \partial\tau_1 = \partial\tau$, equação 3.015 precedente, deu início à idéia de que haveria um erro nas medições dos tempos, ainda que considerássemos, mesmo que de modo incongruente, que os caminhos percorridos pelo raio em ambas as direções fossem o mesmo. Aqui, é importante considerar que nem os tempos, tampouco as distâncias, seriam as mesmas assim como já foi comentado no item 4.3.

Um fato interessante: mesmo supondo que, no sentido negativo de movimento, a velocidade relativa do raio de luz fosse *C+V*, ou seja, uma possível velocidade maior que a velocidade da luz, o resultado final das transformações garantiu que uma velocidade assim seria impossível em termos da transformação, pois se assim o fosse geraríamos, a partir dos cálculos, valores complexos para os tempos, uma impossibilidade física.

4.5. Com Respeito à Métrica $(ds)^2$ do Espaço de Minkowski

Segundo a referência 10, a definição de métrica, norma ou comprimento de um vetor *a* qualquer identificado por um conjunto de elementos $a_i = a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, é dada por $|a|$ e é definida pela seguinte relação:

$$|a| = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]} \qquad (4.002)$$

Caso consideremos um sistema de 4 dimensões a norma seria:

$$ds = \sqrt{(Cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2} \qquad (4.003)$$

Foi interessante como a definição da métrica do espaço de Minkowski, que é uma conceituação obrigatória para todo o conjunto de um espaço qualquer, acabou dando origem a uma dimensão temporal.
Quando adotamos a condição particular de trabalhar no tempo próprio do fenômeno, uma vez que consideramos o ponto $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$ no local de medição do tempo $\bar{t}$, buscamos trabalhar apenas com a dimensão tempo no sistema em movimento. Como já dissemos antes, fisicamente isso significa a colocação da medição do tempo na origem do sistema que por ora se encontra em movimento em relação ao outro sistema em repouso. Isso fez com que desenvolvêssemos uma diferencial *ds = d(Ct) = C dt* que mesmo tendo a dimensão de espaço, por ser em função de uma constante *C*, tornou no resultado final como uma variável função do tempo. Esse tempo *ds*, trata-se de um pseudo-tempo. Com esse artifício foi possível introduzir, dentro das equações cuja variável independente é o tempo, outra variável, porém como função da relação de velocidades *v/C*, uma relação importantíssima para a Teoria da Relatividade.
Como isso nos foi possível elaborar uma expressão que nos mostrasse a relação direta entre a variação da quantidade de movimento de um ponto material e a correspondente força de ação e reação, seguindo o mesmo raciocínio adotado por Isaac Newton na formulação de sua lei da aceleração.

4.6. Com Respeito á Dinâmica Relativística e ao Conceito de Massa Inercial

A 2ª. lei de Newton é conhecida como a lei da aceleração e se dispõe sobre da força exercida em um ponto material, em movimento, sendo proporcional a variação da quantidade de movimento a que esse ponto material esteja sujeito. A partir daqui, seguindo os mesmos princípios, apenas levando em consideração que haveria possibilidade de ocorrer a variação da massa, surgiu um importante conceito sobre o que seria massa inercial. Se o ponto material encontra-se em movimento é sinal que ele está dotado de energia cinética conforme a expressão $dE = d(m_0 \beta C^2)$ cuja solução nos fornece a equação $\int_0^E dE = \int_{\beta=1}^{\beta} d(m_0 \beta C^2)$, isso já pela óptica da Teoria da Relatividade.
Partindo do repouso, um determinado corpo material foi acelerado até uma velocidade *v* que agora se encontra embutida no parâmetro β da equação precedente. A integração da diferencial de energia, conforme mostra a equação anterior, nos daria $E = m_0(\beta - 1)C^2$ da qual extrairíamos uma condição $E = m_0 C^2$ que tem a ver com o limite inferior da integração, uma energia do tipo inercial correspondente à condição em que encontramos o corpo material parado.
Como estamos analisando o desenrolar dos fenômenos segundo o princípio que rege a 2ª. lei de Newton, podemos imaginar que toda a massa do corpo material se encontra confinada em um ponto e também podemos concluir que essa massa, ou aquilo que chamamos de massa nesse princípio, tem tudo a ver com um tipo específico de energia que, em caso de

uma possível aceleração, sujeitaria essa mesma massa concentrada a uma transformação, ou seja, em uma espécie de desintegração daquilo que chamamos de massa original ou massa inercial. Essa concepção foi fundamental para que a grandeza massa inercial fosse entendida. Poderíamos, então, questionar que, por ação de qualquer movimento, por menor que este seja, a massa já começaria a se transformar em energia, ou, em outras palavras, começaria a se desintegrar. Isso não nos parece uma situação que a rigor veríamos no nosso dia a dia. Podemos afirmar, com reservas, que tal condição de desintegração, foi observada nas reações nucleares de que temos conhecimento. Não estamos também levando em conta a questão da energia que está sendo irradiada, no presente momento, pelo corpo material, um fato inegável. Agora perguntaríamos: o que seria essa tal desintegração propriamente dita? Do que se trata?
A transformação do ente massa em energia, obtida pela dinâmica do processo, mostra que energia e matéria não podem ser dissociadas. Com relação às condições das ligações eletrônicas, no nível de subpartículas, o que podemos dizer é que não se pode definir um ponto em que passará a existir desintegração ou mesmo decaimento. Isto estaria associado ao estudo das forças fundamentais da natureza, um campo ainda meio obscuro. O que sabemos é que ao acelerar um ponto material a velocidades próximas à velocidade da luz o processo de desintegração começa a aparecer. Lembramos que a desintegração não se limita apenas na transformação de um determinado material em outro, um elemento químico em outro elemento, mas sim a conversão de matéria em energia na forma de emissão luminosa.

Observação:
Existe uma digressão interessante sobre essa questão da massa inercial e a sua transformação em energia pura. Imaginemos um ponto material singular, um átomo do elemento químico Hidrogênio mais simples, conhecido como prótio, com 1 próton no núcleo e 1 elétron na eletrosfera[18].

Sabemos que praticamente a massa desse ponto material será representada na sua totalidade pela massa em repouso do próton que é de 1.836,076 vezes maior que a massa do elétron circundante, segundo a referência 9. Nos processos de interação energética, é sabido que o elétron pode passar do estado de matéria para o estado de energia sob a forma de uma radiação gama de alta potência. E a massa do próton? Como ficaria? Não é possível saber se existe essa condição em que a própria massa de um próton pudesse se converter em energia. O que nos parece é que essa energia tem mesmo a sua razão no processo de fusão nuclear que ocorre nas estrelas e cuja energia permite a formação da ligação próton – elétron que acaba integrando para formação da matéria. Seria a conversão do plasma estelar em Hidrogênio. Essa conceituação é fundamental para que entendamos o que é massa, ou pelo menos, o que significa a grandeza massa de um ponto material. Seria a massa, ou aquilo que empregamos na equação da força e da aceleração, essa energia gasta e acumulada na forma das ligações nucleares, que acaba criando o chamado campo gravitacional que interage entre as partículas que existem na forma de matéria? Seria essa a energia material? Parece um paradoxo dizer a expressão "energia material", mas é exatamente essa idéia que nos convida a meditar.
A massa, em termos materiais, tem tudo a ver com uma espécie de densidade material que confere uma particularidade aos corpos. Uns são mais maciços que outros enquanto outros são mais leves que outros, porém essa característica somente pode ser avaliada quando

[18] Quando nos referimos a um ponto material, queremos dizer que ao delimitarmos um corpo físico e tangível, não importando a sua forma, imaginamos a concentração da massa desse corpo num ponto que poderia ser o centro de gravidade desse corpo. Porém, a ideia de ponto material vai mais além, ela quer dizer que, se existe um ponto no espaço, definido e determinado como representativo da massa inercial de um corpo, esse ponto é mínimo e indivisível, ou seja, não existirá a possibilidade de haver 2 ou mais pontos materiais simultâneos representativos desse mesmo corpo.

esses corpos se encontram sujeitos à ação de um campo gravitacional. A referência 1 traz uma menção à respeito do conceito de massa lembrando as ponderações de Albert Einstein que afirmou não haver uma distinção entre o que ele chamou de massa inercial e massa gravitacional, o conhecido e importante "princípio da equivalência das massas".
Ainda hoje há uma discussão sobre a real natureza da força gravitacional, como ela age e como se propaga pelo cosmo interestelar. Um dos grandes problemas da força gravitacional, e da teoria da analogia desta com as forças de origem eletromagnética, é que ela não admite repulsão, apenas atração, pelo menos até onde conhecemos a sua atuação[19].

[19] Lembramos que massa inercial tem a ver com a resistência que um corpo material oferece ao processo de aceleração dessa massa e força gravitacional tem a ver com a força de ação do campo gravitacional sobre essa mesma massa.

5. TEORIA DA RELATIVIDADE PELA ÓTICA DO CÁLCULO VETORIAL

5.1. Postulados da Teoria da Relatividade

A referência 3 afirma que, se dada uma determinada grandeza, existirá algo de absoluto nela que independerá dos sistemas de referência adotado para analisar, por exemplo, a sua dinâmica, porém também existirá algo relativo que será a sua representação nos diferentes sistemas que possamos adotar.
Afirma também que o princípio da relatividade associa-se ao princípio da identidade, princípio este que garante a definição de uma determinada grandeza mediante um agente físico que pode vir a representar essa grandeza independentemente de sistemas de sistemas referenciais empregados na análise de algum comportamento a ela associado.
Essa garantia tem a ver com a modelagem físico-matemática adotada na representação do fenômeno em que tal grandeza física encontra-se inserida sendo que a formulação deverá estabelecer um invariante face às mudanças que se darão em função das respectivas imagens em cada um dos sistemas de coordenadas adotados.
Um bom exemplo disso é a chamada transformação ortogonal de Blondel ou de Park utilizada na representação e modelagem de máquinas síncronas cujas grandezas elétricas representadas em um sistema fixo de coordenadas, variantes com a rotação da máquina, são matematicamente transformadas e convertidas em grandezas de um sistema móvel que gira junto com o rotor da máquina. O invariante nesta transformação é a potência originária da conversão eletromecânica do processo.
Postulamos então o princípio da relatividade que diz que na definição físico-matemática de um fenômeno qualquer, caso essa definição seja um invariante, temos aí caracterizada uma lei física.
Tomando como base o que foi estabelecido em termos de movimento relativo, podemos enunciar o princípio da relatividade de Einstein que exprime a invariância de certas relações da mecânica clássica para sistemas que estejam se movendo com velocidade constante e retilínea.
"Dois sistemas referenciais em movimento constante e retilíneo têm assegurada a invariância das relações, independente de se tomar um ou outro sistema como base de referência."
Para a mecânica clássica de Galileu e Newton, existia um espaço absoluto composto de pontos e de um tempo absoluto composto de instantes. Portanto, na formulação da mecânica clássica estavam as noções de espaço absoluto definido pela geometria euclideana e de tempo absoluto que fluía continuamente de maneira inexorável. Dentro desse sistema eram definidas as grandezas básicas como massa, aceleração e força.
Na mecânica relativística há um rompimento com a questão do tempo absoluto e com o sistema tridimensional clássico.
O modelo proposto agora se baseia nos cálculos relativísticos que utilizamos como referencial, o modelo do espaço de Minkowski, que se constitui de um sistema de coordenadas quadridimensional, um sistema pseudo-euclideano.

5.2. Equações do Movimento Relativo na Forma Vetorial

Imaginando na figura 3.2 a existência de um eixo especial, cuja variável seja função do tempo, e o adicionando aos eixos que normalmente compõem o sistema referencial inerente ao modelo clássico de Galileu, criado por Isaac Newton, criamos um novo sistema.

Assim, procurando proceder com a representação de um vetor posição *r* num sistema de coordenadas retangulares *XYZT*, em função do tempo *t*, temos:

$$r(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} + e(t)\hat{t} \tag{5.001}$$

Onde $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{t}$ são os vetores unitários referentes a cada um dos eixos *XYZT* e *e(t)* uma função do tempo através de um invariante que seria a velocidade da luz.

Na proposição de Einstein, a variável *e(t)* é definida por *e(t)* = *Ct* onde *C* é velocidade da luz no vácuo[20].

Considerando a forma matricial de representação do vetor coluna *r* vem:

$$r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ Ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{5.002}$$

Ou melhor:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ Ct \end{bmatrix} \quad \therefore \quad [x_i] = D[x]_{i=1,2,3,4} \tag{5.003}$$

Através dessas relações, um ponto no espaço de Minkowski fica determinado, mas para criar a base do espaço há necessidade de definir a métrica desse espaço, ou seja, o valor métrico para a definição do comprimento de arco, o que é dado pela seguinte relação:

$$(ds)^2 = dr \cdot dr \tag{5.004}$$

Isso significa que o quadrado do comprimento de arco do espaço definido, representando o módulo do comprimento, é igual ao produto escalar do vetor posição *r* por ele mesmo.

A razão da utilização desta medida métrica tem tudo a ver com o fato de a relação em questão definir um invariante, senão vejamos a seguir.

Seja considerar, por exemplo, 2 vetores *a* e *b* conforme as seguintes representações onde x_i é a base do espaço vetorial desse sistema:

[20] Segundo Einstein, pelo menos é assim que ficou definido no artigo de 1905, a escolha da velocidade da luz como um invariante foi mais por falta de algo um tanto quanto que mais concreto.

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

O produto interno ou produto escalar dos vetores *a* e *b* será dado por:

$$p = (a,b) = a^T b = \begin{bmatrix} a_1 x_1 & a_2 x_2 & \cdots & a_n x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 x_1 \\ b_2 x_2 \\ \vdots \\ b_n x_n \end{bmatrix}$$

A indicação do vetor a^T , como sabido, representa a matriz transposta da matriz *a* utilizada no procedimento de multiplicação de matrizes.

$$p = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$p = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \qquad (5.005)$$ [21]

Para o caso em que o vetor *b* seja igual ao *vetor a,* fica definido o módulo do componente escalar, num dado espaço, caso sejam *a e b* vetores incrementais de posição, e iguais a *dr,* vem que:

$$(ds)^2 = dr \cdot dr$$

Para

$$r = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} \qquad \therefore \qquad d\,r = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$$

Donde:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

A expressão acima nos remete ao modelo do espaço euclideano de Galileu que na forma matricial ficará da seguinte modo:

$$(ds)^2 = \begin{bmatrix} dx & dy & dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

Ou melhor:

---

[21] Observar que o produto escalar ou interno $x_i^T \cdot x_i = 1$ da base vetorial do espaço será sempre um escalar unitário.

$$(ds)^2 = \begin{bmatrix} dx & dy & dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

Numa forma matricial mais compacta:

$$(ds)^2 = (dr)^T M(dr) \tag{5.006}$$

A equação matricial 5.006 é a equação por definição do módulo de comprimento de arco em um sistema tri-ortogonal que nada mais é que o sistema adotado para o modelo de espaço euclideano.

Quando o espaço euclideano contém *n* dimensões, ou seja, ele é n-dimensional, temos:

$$dr = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

A equação anterior pode ser entendida como a representação do processo de generalização da equação da métrica para o espaço euclideano n-dimensional[22].

5.3. Equações do Movimento Relativo do Espaço de Minkowski

A formulação do espaço de Minkowski pode ser explicada da seguinte forma. Partimos, inicialmente, da condição de existência de um sistema inercial no qual os movimentos menores podem ser definidos através do modelo de Galileu, ou seja, um sistema referencial tri-ortogonal do tipo *XYZ*.

Um outro sistema referencial $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$ é apresentado se movendo a uma taxa de velocidade elevada em relação a velocidade da luz, por exemplo, de modo que valha a equação seguinte, se já não conhecida será de fácil obtenção:

$$r = \bar{r} + Ct \tag{5.007}$$

Por comodidade, vamos adotar a seguinte disposição:

$$-\bar{r} = -r + Ct$$ [23]

[22] Quando o espaço é genérico, não obedecendo a uma métrica específica, ele é comumente chamado de "espaço riemanneano". Um exemplo bem simples que mostra a diferença entre os espaços aqui mencionados é saber que, no espaço euclideano, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º, ao passo que no espaço riemanneano, onde o plano seja a superfície de uma esfera, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 270º.

[23] A referência 3 sugere que esta mudança seja feita, porém não explica direito o porquê desta sugestão. Na realidade, se formos tomar as deduções realizadas no item anterior 3.2.3., da "Teoria da Transformação das Coordenadas e do Tempo na Passagem de um Sistema em Repouso para Outro que está Animado em Relação ao Primeiro de uma Translação Uniforme", saberemos que nesta transformação o vetor *Ct* ocupa o sinal invertido com relações aos outros vetores relativos aos eixos *XYZ*.

Assim, colocando na forma matricial vem:

$$r^T = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$$

Donde:

$$-\bar{r}^T = \begin{bmatrix} -x & -y & -z & Ct \end{bmatrix}$$

A fim de aplicarmos ao movimento relativo um tal efeito aqui aventado, ou seja, supormos a não variância do tempo, como podemos perceber pela direção em que o desenvolvimento está se desenrolando, o vetor posição incremental passará a ser representado pela seguinte equação:

$$-(d\bar{r})^T = \begin{bmatrix} -dx & -dy & -dz & Cdt \end{bmatrix} \tag{5.008}$$

A equação 5.008 na forma desenvolvida será:

$$-(d\bar{r})^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dt \end{bmatrix} \tag{5.009}$$

Na equação 5.009, *dx*, *dy*, *dz*, *dt* são as diferenciais das variáveis do vetor $d\bar{r}$ cuja matriz quadrada, representada na equação, trata-se da matriz referente à métrica utilizada na medida. Deste modo, para mantermos a coerência da matriz quadrada, chamaremos esta matriz de "matriz de métrica" do sistema adotado, ficando então definida qualquer relação que parta de uma dimensão ou de um comprimento a ser estabelecido.

Depois do estabelecimento de conceitos, podemos partir para a obtenção da matriz de transformação para as variáveis dos 2 sistemas referenciais, um deles em repouso e o outro em movimento em relação ao primeiro, com o mesmo movimento até aqui estudado, qual seja, movimento de translação retilíneo ao longo do eixo *X* e com velocidade constante.

As matrizes de transformação, numa forma genérica, serão relacionadas do seguinte modo, onde as variáveis $\bar{x}_i$ e x_i , $i = 1,2,3,4$, são as variáveis no sistema em movimento e no sistema em repouso respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Resumidamente, numa forma compacta, temos:

$$\bar{x}_i = \sum a_{ij} x_j \qquad \begin{matrix} i = 1,2,3,4 \\ j = 1,2,3,4 \end{matrix} \tag{5.010}$$

As relações existirão apenas entre as variáveis $x_1, \bar{x}_1$ e $x_4, \bar{x}_4$, uma vez que o movimento de translação de um sistema em relação ao outro se dá apenas no eixo *X* e no eixo *T*. A questão agora é utilizar da análise vetorial, aplicando o conceito do cálculo tensorial, considerando a matriz de transformação como se fosse um tensor contravariante, conforme conhecemos da teoria da análise tensorial.

Deste modo, temos então a relação de transformação segundo um tensor contravariante de ordem 1 [24] conforme a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_3} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_3} & \frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Resumidamente, numa forma compacta, temos a seguinte representação para a equação matricial anterior:

$$\bar{x}_i = A\, x_i \qquad \text{ou} \qquad \bar{x}_i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} x_j \qquad \begin{matrix} i = 1,2,3,4 \\ j = 1,2,3,4 \end{matrix} \tag{5.011}$$

Considerando as observações acima, vem:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{5.012}$$

A questão agora é a determinação das relações contravariantes para que fiquem definidas as relações de transformação das variáveis do sistema em repouso *XYZT* para o sistema móvel $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}\bar{T}$.

Será utilizada a equação 5.006 da métrica, já considerando as variáveis $d\bar{r}$ e dr . Assim:

[24] Um tensor de ordem 1 nada mais é que um vetor comum, ver referência 4. Segundo esta mesma referência, um tensor de ordem zero, trata-se de um escalar, e pode ser tratado como um invariante.

$$(ds)^2 = (d\bar{r})^T M(d\bar{r}) = Constante$$

Onde:

$$dr = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dx_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad d\bar{r} = \begin{bmatrix} d\,\bar{x}_1 \\ d\,\bar{x}_2 \\ d\,\bar{x}_3 \\ d\,\bar{x}_4 \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo a expressão de ds vem:

$$(ds)^2 = (d\bar{r})^T M(d\bar{r}) = Q \qquad \therefore \qquad Q = (d\bar{x}_i)^T M(d\bar{x}_i) \quad i = 1,2,3,4$$ [25]

Mas da equação 5.012 temos que:

$$(d\bar{x}_i) = A(dx_i) \qquad i = 1,2,3,4$$

Assim:

$$Q = (A\,dx_i)^T M(A\,dx_i) = (dx_i)^T A^T MA(dx_i) \qquad i = 1,2,3,4$$

Ou melhor:

$$Q = (dx_i)^T P(dx_i) \qquad i = 1,2,3,4$$

Finalmente:

$$P = A^T M\,A \tag{5.013}$$

A relação resultante dessa transformação foi outra forma quadrática semelhante àquela utilizada na partida para o sistema com variáveis barradas.

Deste modo, sabemos que a utilização da equação da métrica na forma quadrática, trata-se de um invariante no processo de transformação entre os sistemas.

Como a métrica de transformação deverá ser a mesma, pela equação 5.013:

[25] Notamos que esta forma nada mais é que a clássica forma quadrática normalmente usada em várias operações matemáticas.

$$M = A^T M A \tag{5.014}$$

A matriz *A* da equação 5.012 é uma matriz quadrada e simétrica o que permite escrevermos a seguinte relação:

$$\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_4} = \frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_1}$$

A equação 5.014 garante a existência de uma lei que será utilizada para o levantamento das incógnitas contravariantes que compõem o tensor descrito pela equação 5.012.

Assim, desenvolvendo a equação matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{41} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a^2{}_{11} + a^2{}_{41} & 0 & 0 & -a_{11}\, a_{14} + a_{41}\, a_{44} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_{11}\, a_{14} + a_{44}\, a_{41} & 0 & 0 & -a^2{}_{14} + a^2{}_{44} \end{bmatrix}$$

O seguinte sistema de equações é obtido a partir da igualdade entre as 2 matrizes anteriores:

$$-a^2{}_{11} + a^2{}_{41} = -1$$
$$-a^2{}_{14} + a^2{}_{44} = 1$$
$$-a_{11}\, a_{14} + a_{41}\, a_{44} = 0$$

Pela simetria considerada temos que $a_{14} = a_{41}$.

$$-a^2{}_{11} + a^2{}_{14} = -1 \tag{5.015}$$

$$-a^2{}_{14} + a^2{}_{44} = 1 \tag{5.016}$$

$$-a_{11}a_{14}+a_{41}a_{44}=0 \tag{5.017}$$

Somando as equações 5.015 e 5.016 obtemos o seguinte:

$$a^2{}_{44}-a^2{}_{11}=0 \quad \therefore \quad a_{44}=\pm a_{11} \quad ou \quad a_{11}=\pm a_{44}$$

Para $a_{44}=+a_{11}$ na equação 5.017 temos:

$$-a_{11}a_{14}+a_{41}a_{11}=0 \quad \therefore \quad a_{11}(a_{41}-a_{14})=0$$

Para $a_{11}\neq 0$ na equação anterior temos:

$a_{41}=a_{14}$ simetria confirmada !!!

Para $a_{44}=-a_{11}$ na equação 6.017 temos:

$$-a_{11}a_{14}+a_{41}(-a_{11})=0 \quad \therefore \quad -a_{11}(a_{41}+a_{14})=0$$

Para $a_{11}\neq 0$ na equação anterior temos:

$a_{41}=-a_{14}$ simetria não confirmada !!!

Deste modo, temos 2 matrizes *A* de transformação que resolvem, matematicamente, o nosso problema e que serão reescritas a seguir:

$$A_1=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 & a_{11} \end{bmatrix} \tag{5.018}$$

e

$$A_2=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_{14} & 0 & 0 & -a_{11} \end{bmatrix} \tag{5.019}$$

Analisando o sistema de equações 5.015, 5.016, 5.017, concluímos que, a partir das funções hiperbólicas, os elementos das matrizes *A* poderiam ser reescritos de uma forma específica, do seguinte modo:

$$a_{11} = cosh\alpha$$
$$a_{14} = -sinh\alpha \quad e \quad a_{41} = -sinh\alpha$$
$$a_{44} = cosh\alpha \quad e \quad a_{44} = -cosh\alpha \quad para \quad a_{41} = sinh\alpha$$

Para a matriz A_1 temos a seguinte montagem dos elementos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} cosh\alpha & 0 & 0 & -senh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -senh\alpha & 0 & 0 & cosh\alpha \end{bmatrix} \tag{5.020}$$

Assim, a equação 6.012 toma a sua forma definitiva do modo seguinte:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cosh\alpha & 0 & 0 & -sinh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -sinh\alpha & 0 & 0 & cosh\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{5.021}$$

De onde extraímos que:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= (cosh\alpha)x_1 - (sinh\alpha)x_4 \\ \bar{x}_2 &= x_2 \\ \bar{x}_3 &= x_3 \\ \bar{x}_4 &= -(sinh\alpha)x_1 + (cosh\alpha)x_4 \end{aligned} \tag{5.022}$$

Trazendo da equação 5.003 as reais variáveis para o nosso sistema vem:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= z \\ x_4 &= Ct \end{aligned}$$

Também teremos:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \bar{x} \\ \bar{x}_2 &= \bar{y} \\ \bar{x}_3 &= \bar{z} \\ \bar{x}_4 &= C\bar{t} \end{aligned}$$

A equação 5.022 também poderá assim ser reescrita numa forma expandida:

$$\bar{x} = (\cosh\alpha)x - (\sinh\alpha)Ct \qquad (5.023)$$

$$\bar{y} = y \qquad (5.024)$$

$$\bar{z} = z \qquad (5.025)$$

$$C\bar{t} = -(\sinh\alpha)x + (\cosh\alpha)Ct \qquad (5.026)$$

Como o modelo do espaço de Minkowski é uma generalização do modelo de Galileu, como aplicação, será usado o próprio sistema de Galileu, suposto real, onde temos um esquema semelhante àquele visto na figura 3.2, e que foi transcrito para essa seção, supondo constante a velocidade *v*, qualquer e de modo que pudéssemos escrever o seguinte:

$$0 < v < C$$

Onde $C = 3\ x10^8\ m/s$.

Através dos limites da velocidade é possível obter as condições de contorno para o nosso problema em questão.

Considerando a condição para $\bar{x} = 0$ na equação 5.023 anterior teremos:

$$0 = (\cosh\alpha)x - (\sinh\alpha)Ct \quad \therefore \quad \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha} = \frac{x}{Ct}$$

Como da equação 3.006, anterior, nos é dado que $x = x' + Vt$, sendo x' o deslocamento próprio no sistema de eixos em movimento, no nosso caso aqui $\bar{x}$, temos que $x = vt$.

Deste modo:

$$\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha} = \frac{x}{Ct} = \frac{vt}{Ct} = \frac{v}{C} \qquad \therefore \qquad tgh\alpha = \frac{v}{C}$$

Das equações-base que descrevem as funções hiperbólicas, sabemos que:

$$\cosh^2\alpha = \frac{1}{1 - tgh^2\alpha} \quad \therefore \quad \cosh^2\alpha = \frac{1}{1 - (\frac{v}{C})^2} \quad \therefore \quad \cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{C})^2}} \qquad (5.027)$$

$$sinh^2\alpha = \frac{tgh^2\alpha}{1-tgh^2\alpha} \quad \therefore \quad sinh^2\alpha = \frac{(\frac{v}{C})^2}{1-(\frac{v}{C})^2} \quad \therefore \quad sinh\alpha = \frac{\frac{v}{C}}{\sqrt{1-(\frac{v}{C})^2}} \tag{5.028}$$

Logo, a partir dos resultados das equações 5.027 e 5.028, teremos, para as equações de transformação 5.023 – 5.026, que:

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{C})^2}}(x - vt) \tag{5.029}$$

$$\bar{y} = y \tag{5.030}$$

$$\bar{z} = z \tag{5.031}$$

$$\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{C})^2}}(t - \frac{v}{C^2}x) \tag{5.032}$$

A equação 5.012 pode ser apresentada numa forma compacta segundo a seguinte equação:

$$\bar{x}_i = A\,x_i$$

o que, obviamente, admite a inversa conforme a seguinte disposição:

$$x_i = A^{-1}\bar{x}_i \tag{5.033}$$

Na equação 5.033, é precondição para a exequibilidade da operação que a matriz *A* não seja singular.

Sendo a matriz *A* expressa pela equação 5.020, sua inversa é de fácil obtenção, senão vejamos.

$$A^{-1} = \frac{adjunta\ A}{det\ A} = \frac{1}{cosh^2\alpha - senh^2\alpha}\begin{bmatrix} cosh\alpha & 0 & 0 & senh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ senh\alpha & 0 & 0 & cosh\alpha \end{bmatrix}$$

Logo:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} cosh\alpha & 0 & 0 & senh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ senh\alpha & 0 & 0 & cosh\alpha \end{bmatrix} \tag{5.034}$$

A equação 5.033 também poderá assim ser reescrita numa forma expandida:

$$\begin{gathered} x = (cosh\alpha)\bar{x} - (sinh\alpha)C\bar{t} \\ y = \bar{y} \\ z = \bar{z} \\ Ct = -(sinh\alpha)\bar{x} + (cosh\alpha)C\bar{t} \end{gathered}$$

Utilizando as equações 5.027 e 5.028 vem:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{C})^2}}(\bar{x} + v\bar{t}) \tag{5.035}$$

$$y = \bar{y} \tag{5.036}$$

$$z = \bar{z} \tag{5.037}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{C})^2}}(\bar{t} + \frac{v}{C^2}\bar{x}) \tag{5.038}$$

Nas deduções anteriores, apenas lembrando, o desenvolvimento se deu em cima da escolha da matriz A_1, equação matricial 5.020, donde $A = A_1$.
Se ao invés disso fosse escolhida a matriz A_2 as equações de transformação seriam outras, com $A = A_2$.

Para a matriz $A = A_2$ temos a seguinte montagem dos elementos da equação 5.019 anterior:

$$A_2 = \begin{bmatrix} cosh\alpha & 0 & 0 & -senh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ senh\alpha & 0 & 0 & -cosh\alpha \end{bmatrix} \tag{5.039}$$

De onde extraímos, analogamente, às equações 5.022 que:

$$\bar{x}_1 = (\cosh\alpha)x_1 - (\sinh\alpha)x_4$$
$$\bar{x}_2 = x_2$$
$$\bar{x}_3 = x_3$$
$$\bar{x}_4 = (\sinh\alpha)x_1 - (\cosh\alpha)x_4$$

Donde:

$$\bar{x} = (\cosh\alpha)x - (\sinh\alpha)Ct$$
$$\bar{y} = y$$
$$\bar{z} = z$$
$$C\bar{t} = (\sinh\alpha)x - (\cosh\alpha)Ct$$

Utilizando, do mesmo modo, as equações 6.027 e 6.028 vem:

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{C})^2}}(x - vt)$$

$$\bar{y} = y$$

$$\bar{z} = z$$

$$\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{C})^2}}(-t + \frac{v}{C^2}x) \qquad (5.040)$$

Observando a equação 5.040, percebemos que não procede como o esperado, bastando ver que a equação trabalha com um tempo *t* negativo, na fórmula, quando $v \rightarrow 0$, uma impossibilidade considerando a hipótese inicial de um tempo positivo e contínuo que foi levado em conta nas deduções.
Devemos levar em consideração, portanto, apenas as relações originárias da matriz de transformação A_1 desprezando aquelas provenientes da matriz A_2.

Continuando o desenvolvimento teórico na formulação do estudo com respeito à dinâmica relativística, demonstraremos, por cálculo matricial, as expressões para a velocidade do ponto material a partir da formulação dos resultados anteriores.

Lembrando que adotaremos um artifício algébrico, para a definição da velocidade, a fim de conseguir levar a influência do parâmetro β para as equações futuras que utilizaremos na composição da fórmula de energia quando for explorada a dinâmica relativística. Com a

presença do parâmetro β dentro das equações de velocidade dos 4 eixos será possível analisar os efeitos da aceleração sobre a massa de um ponto material.

A definição da velocidade *u*, considerando as variáveis do vetor velocidade no tempo *t* na forma de quadrivetor, será dada por:

$$u_i = \frac{dx_i}{ds} \qquad i = 1,2,3,4 \tag{5.041}$$

A partir da equação 4.094, passamos a utilizar o pseudo-tempo *ds* na equação 5.041, anterior, de forma que, com $ds = \frac{C}{\beta} dt$, assim poderemos escrever que:

$$u_i = \frac{\beta}{C} \frac{dx_i}{dt} \qquad i = 1,2,3,4 \tag{5.042}$$ [26]

Poderemos escrever também o seguinte:

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ C \end{bmatrix} \qquad i = 1,2,3,4 \tag{5.043}$$

Assim:

$$u_i = \frac{\beta}{C} v_i \qquad i = 1,2,3,4 \tag{5.044}$$

Colocando a equação 6.043 numa forma expandida vem:

[26] Vamos chamar as velocidades u_i de pseudo-velocidades.

$$v_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad i = 1,2,3,4 \tag{5.045}$$

Levando a expressão de v_i da equação 5.045 na equação 5.044, vem:

$$u_i = \frac{\beta}{C} D \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad i = 1,2,3,4 \tag{5.046}$$

Convém lembrar uma propriedade que veio embutida no processo de desenvolvimento teórico, por nós adotado, que pode ser representada pela relação seguinte.

Da equação 5.041, sabemos que as pseudo-velocidades são representadas pela relação $u_i = \frac{dx_i}{ds}$, considerando o sistema em repouso. Se considerarmos o sistema em movimento, as pseudo-velocidades serão representadas agora por $\bar{u}_i = \frac{d\bar{x}_i}{d\bar{s}}$. Como $d\bar{s} = ds$ vem então que: $u_i = \frac{dx_i}{ds}$ e $\bar{u}_i = \frac{d\bar{x}_i}{ds}$.

A lei de transformação para as velocidades é a seguinte:

$$\bar{x}_i = A\, x_i \qquad i = 1,2,3,4 \tag{5.047}$$

Logo, derivando a equação 6.047 em relação ao pseudo-tempo *s* vem:

$$\frac{d\bar{x}_i}{ds} = A \frac{dx_i}{ds} \qquad \therefore \qquad \bar{u}_i = A\, u_i \qquad i = 1,2,3,4 \tag{5.048}$$

Considerando a transformação padrão, podemos escrever para as ditas pseudo-velocidades na forma seguinte:

$$\bar{u}_i = A u_i = A \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\beta}{C} AD \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (5.049)$$

$$i = 1,2,3,4$$

Mas também temos a seguinte relação para a pseudo-velocidades:

$$\bar{u}_i = \frac{\bar{\beta}}{C} D \begin{bmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (5.050)$$

$$i = 1,2,3,4$$

Assim, a partir da equação 5.050, a equação 5.049 tomará o seguinte aspecto:

$$\frac{\bar{\beta}}{C} D \begin{bmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\beta}{C} AD \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\beta}{\bar{\beta}} D^{-1} AD \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (5.051)$$

$$i = 1,2,3,4$$

Pelo mesmo raciocínio, obtemos também que:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\bar{\beta}}{\beta} D^{-1} A^{-1} D \begin{bmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (5.052)$$

Agora, para efetuarmos a operação matricial $D^{-1}A^{-1}D$ deveremos considerar alguns detalhes interessantes.

A matriz A inversa que utilizamos em nossos cálculos é a matriz A_1 inversa dada pela equação 5.034 e reescrita a seguir.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} cosh\alpha & 0 & 0 & senh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ senh\alpha & 0 & 0 & cosh\alpha \end{bmatrix} \tag{5.053}$$

As equações 5.027 e 5.028 nos fornecem as expressões para o $cosh\alpha$ e o $senh\alpha$, que poderemos obter em função do parâmetro $\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/C^2}}$, conforme é dado na equação 3.069.

Deste modo, teremos também:

$$cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{C})^2}} = \beta$$

$$sinh\alpha = \frac{\frac{v}{C}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{C})^2}} = \beta\frac{v}{C}$$

Assim, com as expressões de $cosh\alpha$ e o $senh\alpha$, a matriz de transformação de variáveis entre os 2 sistema toma a seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & -\beta\frac{v}{C} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\frac{v}{C} & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \tag{5.054}$$

Também poderemos obter a matriz inversa da matriz *A*:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & \beta\frac{v}{C} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\frac{v}{C} & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \tag{5.055}$$

A operação $D^{-1}AD$ é dada por:

$$D^{-1}AD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & -\beta\frac{v}{C} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\frac{v}{C} & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & -\beta\frac{v}{C} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\frac{v}{C^2} & 0 & 0 & \frac{\beta}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & -\beta v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\frac{v}{C^2} & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

A operação $D^{-1}A^{-1}D$ é dada por:

$$D^{-1}A^{-1}D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & \beta\frac{v}{C} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\frac{v}{C} & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & \beta\frac{v}{C} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\frac{v}{C^2} & 0 & 0 & \frac{\beta}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & \beta v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\frac{v}{C^2} & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

Com o resultado da operação $D^{-1}AD$ será possível a obtenção das relações de velocidade que ficam da forma seguinte:

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\beta}{\bar{\beta}} D^{-1}AD \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\beta}{\bar{\beta}} \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & -\beta v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\frac{v}{C^2} & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta^2}{\bar{\beta}} & 0 & 0 & -\frac{\beta^2}{\bar{\beta}} v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\beta^2}{\bar{\beta}} \frac{v}{C^2} & 0 & 0 & \frac{\beta^2}{\bar{\beta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.056}$$

E também:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\bar{\beta}}{\beta} D^{-1} A^{-1} D \begin{bmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\bar{\beta}}{\beta} \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & \beta v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta \frac{v}{C^2} & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\beta} & 0 & 0 & \bar{\beta} v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{\beta} \frac{v}{C^2} & 0 & 0 & \bar{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.057}$$

Da equação 5.057 podemos obter a expressão do parâmetro $\bar{\beta}$, senão vejamos:

$$1 = \bar{\beta} \frac{v}{C^2} \bar{v}_x + \bar{\beta} \qquad \therefore \qquad \bar{\beta} = \frac{1}{1 + \frac{v}{C^2} \bar{v}_x} \quad (5.057)$$ [27]

[27] A expressão recursiva para essa solução foi obtida através da comparação da última linha da matriz da equação 5.057.

REFERÊNCIAS

1. I. Nicholson, *GRAVIDADE, BURACOS NEGROS E O UNIVERSO*, Editora Francisco Alves – Rio de Janeiro Brasil – 1983.

2. H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, *artigos incluídos no livro O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE – Textos Fundamentais da Física Moderna – Vol I, Fundação Calouste Gulbenkian – Lisboa – Portugal – 1958*.

3. F. J. Costanti, *INTRODUÇÃO À FÍSICA MODERNA*, Editora Campus – Rio de Janeiro Brasil – 1981.

4. M. R. Spiegel, *ANÁLISE VETORIAL COM INTRODUÇÃO À ANÁLISE TENSORIAL*, Editora McGraw-Hill do Brasil – São Paulo – Brasil – 1972.

5. M. R. Spiegel, *MATHEMATICAL HANDBOOK OF FORMULAS AND TABLES*, McGraw-Hill Book Co. – New York – USA – 1968.

6. H. A. Lorentz, *A EXPERIÊNCIA INTERFERENCIAL DE MICHELSON-LEIDEN*, 1895, *apud* Michelson And Morley – American Journal of Science (3) 34 , 1887, page 333, Phil Mag (5) page 449.

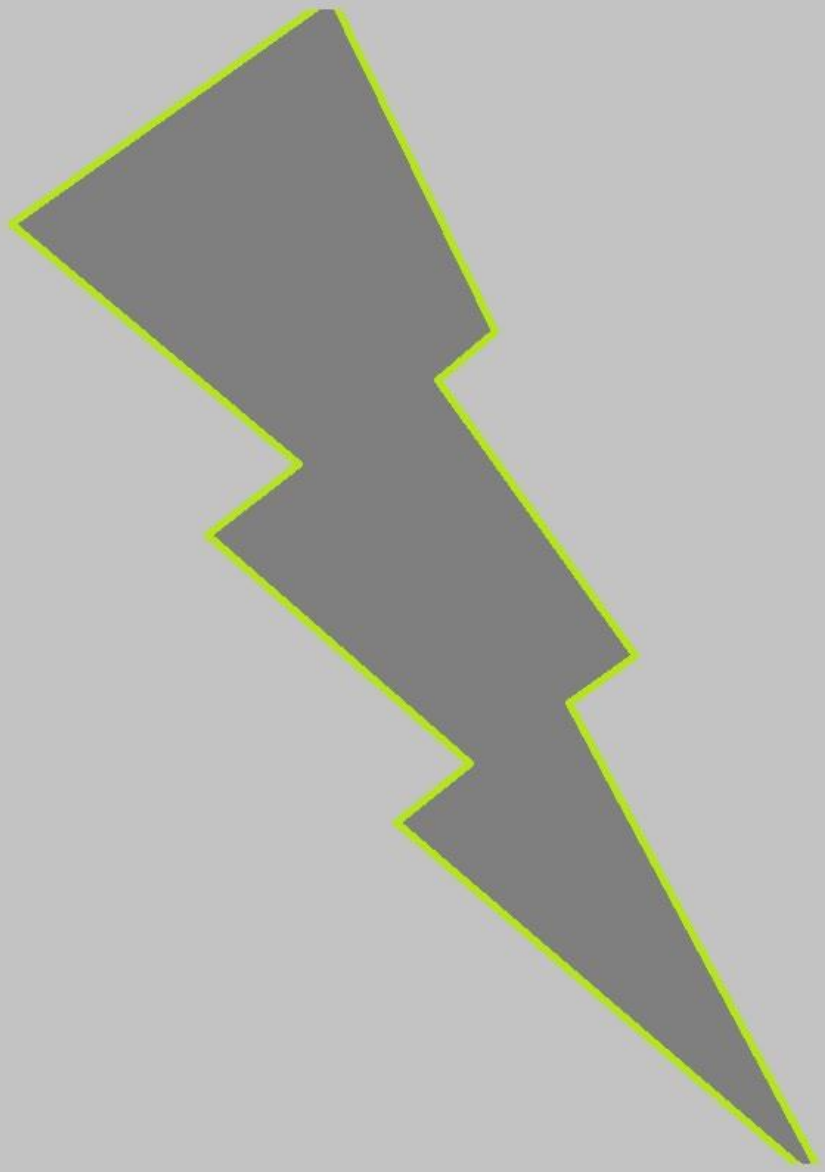
7. A.C. Fauth, J.C. Penereiro, E. Kemp, W.C. Grizolli, D.M. Consalte, L.F.G. Gonzalez, *DEMONSTRAÇÃO EXPERIMENTAL DA DILATAÇÃO DO TEMPO E DA CONTRAÇÃO DO ESPAÇO DOS MÚONS DA RADIAÇÃO CÓSMICA*,

Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 29, n. 4, p. 585 – 591, 2007.

8. G. J. Whitrow, *O QUE É TEMPO?*, Jorge Zahar Editor – Rio de Janeiro – Brasil – 2005.

9. M. Alonso, E. J. Finn, *FÍSICA*, Vol II, Editora Edgard Blücher Ltda – São Paulo– Brasil – 2011.

10. G. Hadley, *ÁLGEBRA LINEAR*, Editora Forense Universitária – Rio de Janeiro – Brasil – 1979.

11. R. M. Wald, *GENERAL RELATIVITY*, The University of Chicago Press – Chicago– USA – 1984.

Relatividade